# ۱۰ دوران

## پودمان ۱۰-۱ متغیرهای حرکت دورانی

** ۱ یک توپ‌انداز خوب بیسبال می‌تواند توپ بیسبال را با تندی ۸۵mi/h که با تندی زاویه‌ای ۱۸۰۰rev/min می‌چرخد، به‌سوی گوشه‌ی هدف پرتاب کند. این توپ تا رسیدن به‌هدف چند دور می‌زند؟ برای آسانی مسیر ۶۰ فوتی را راست‌خط درنظر بگیرید.

**حل:** در مسئله فرض شده است که $v_{com}$ و $\omega$ ثابت‌اند. برای سازگاری ابعاد کمیت‌ها می‌نویسیم:

$$v_{com} = (۸۵ mi/h)\left(\frac{۵۲۸۰ ft/mi}{۶۰ min/h}\right) = ۷۴۸۰ ft/min$$

بنابراین به ازای $\Delta x = ۶۰ft$، مدت زمان پرواز توپ برابر است با

$$t = \Delta x / v_{com} = (۶۰ ft)(۷۴۸۰ ft/min) = ۰/۰۰۸۰۲ min$$

در این مدت، جابه‌جایی زاویه‌ای یک نقطه از سطح توپ برابر است با

$$\theta = \omega t = (۱۸۰۰ rev/min)(۰/۰۰۸۰۲ min) \approx ۱۴ rev$$

* ۲ در یک دستگاه ساعت، که به صورت قیاسی (مانسته) کار می‌کند، تندی زاویه‌ای (الف) عقربه‌ی ثانیه شمار، (ب) عقربه‌ی دقیقه شمار، و (پ) عقربه‌ی ساعت شمار، چیست؟ پاسخ‌ها را برحسب رادیان بر ثانیه بیان کنید.

**حل:** (الف) عقربه‌ی ثانیه شمار در هر ۶۰s زاویه‌ی ۲π رادیان را طی می‌کند. پس داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۶۰} = ۰/۱۰۵ rad/s$$

(ب) عقربه‌ی دقیقه شمار در هر ۳۶۰۰s زاویه‌ی ۲π رادیان را طی می‌کند. در نتیجه داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۳۶۰۰} = ۱/۷۵ \times ۱۰^{-۳} rad/s$$

(پ) عقربه‌ی ساعت شمار زاویه‌ی ۲π رادیان را در مدت ۴۳۲۰۰s طی می‌کند. در نتیجه داریم

$$\omega = \frac{۲\pi}{۴۳۲۰۰} = ۱/۴۵ \times ۱۰^{-۴} rad/s$$

** ۳ وقتی یک قطعه نان برشته را، که روی آن کره مالیده شده ناگهان به طرف کناره‌ی پیشخوان آشپزخانه هُل می‌دهیم، درحین افتادن می‌چرخد. اگرفاصله‌ی پیشخوان تا کف آشپزخانه ۷۶cm باشد و قطعه نان کمتر از یک دور بچرخد، (الف) کمترین و (ب) بیشترین تندی زاویه‌ای که به ازای آن سطح کره مالیده شده‌ی نان به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، چیست؟

**حل:** سقوط آزاد نوعی حرکت با شتاب ثابت است که در فصل ۲ کتاب مطالعه شد. مدت زمانی که طول می‌کشد تا نان کره‌مالیده شده به کف آشپزخانه برخورد کند، برابر است با

$$\Delta t = \sqrt{\frac{۲h}{g}} = \sqrt{\frac{۲(۰/۷۶m)}{۹/۸m/s^۲}} = ۰/۳۹۴s$$

(الف) کمترین زاویه‌ای که به ازای آن سطح کره مالیده شده‌ی نان می‌چرخد و به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، $\Delta\theta_{min} = ۰/۲۵rev = \pi/۲ rad$ است. تندی زاویه‌ای متناظر با این زاویه برابر است با

$$\omega_{min} = \frac{\Delta\theta_{min}}{\Delta t} = \frac{\pi/۲ rad}{۰/۳۹۴s} = ۴/۰ rad/s$$

(ب) بیشترین زاویه‌ای (کمتر از یک دور کامل) که به ازای آن سطح کره مالیده شده به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، $\Delta\theta_{min} = ۰/۷۵rev = ۳\pi/۲ rad$ است. تندی زاویه‌ای متناظر با این زاویه برابر است با

$$\omega_{max} = \frac{\Delta\theta_{max}}{\Delta t} = \frac{۳\pi/۲ rad}{۰/۳۹۴s} = ۱۲/۰ rad/s$$

** ۴ مکان زاویه‌ای نقطه‌ای از یک چرخ دوار، از رابطه‌ی $\theta = ۲/۰ + ۴/۰t^۲ + ۲/۰t^۳$ به دست می‌آید، که در آن $\theta$

برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. در زمان $t=0$، (الف) مکان زاویه‌ای نقطه، و (ب) سرعت زاویه‌ای آن، چقدر است؟ (پ) سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان $t = 4.0\ \text{s}$ چیست؟ (ت) شتاب زاویه‌ای نقطه را در زمان $t = 2.0\ \text{s}$ حساب کنید. (ث) آیا شتاب زاویه‌ای نقطه ثابت است؟

**حل:** اگر یکاها را به طور صریح وارد کنیم، تابع به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\theta = 2.0\ \text{rad} + (4.0\ \text{rad/s}^2)t^2 + (2.0\ \text{rad/s}^3)t^3$$

(الف) تابع $\theta$ را به ازای $t=0$ حساب می‌کنیم و $\theta_0 = 2.0\ \text{rad}$ را به دست می‌آوریم.

(ب) سرعت زاویه‌ای به صورت تابعی از زمان از معادله‌ی ۱۰-۶ به‌دست می‌آید

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = (8.0\ \text{rad/s}^2)t + (6.0\ \text{rad/s}^3)t^2$$

در نتیجه به ازای $t=0$ داریم $\omega_0 = 0$.

(پ) به‌ازای $t = 4.0\ \text{s}$، از تابع به‌دست آمده در قسمت قبلی داریم

$$\omega_4 = (8.0)(4.0) + (6.0)(4.0)^2 = 128\ \text{rad/s}$$

(ت) شتاب زاویه‌ای به صورت تابعی از زمان از معادله‌ی ۱۰-۸ به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 8.0\ \text{rad/s}^2 + (12\ \text{rad/s}^3)t$$

در نتیجه به ازای $t = 2.0\ \text{s}$ داریم

$$\alpha_2 = 8.0 + (12)(2.0) = 32\ \text{rad/s}^2$$

(ث) شتاب زاویه‌ای که در قسمت قبلی به دست آمد، به زمان بستگی دارد، لذا ثابت نیست.

**۵ شیرجه‌رویی در فاصله‌ی میان سکوی ۱۰ متری شیرجه و سطح آب در هوا ۲٫۵ پشتک می‌زند. با فرض آنکه مؤلفه‌ی قائم سرعت آغازی صفر باشد، سرعت زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو را حساب کنید.

**حل:** معادله‌ی ۲-۱۵ را برای محور قائم (جهت رو به پایین $+y$) به‌کار می‌بریم و مدت زمان سقوط آزاد را به دست می‌آوریم:

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(10\ \text{m})}{9.8\ \text{m/s}^2}} = 1.4\ \text{s}$$

بنابراین، بزرگی سرعت زاویه‌ای متوسط با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۵ برابر است با

$$\omega_{avg} = \frac{(2.5\ \text{rev})(2\pi\ \text{rad/rev})}{1.4\ \text{s}} = 11\ \text{rad/s}$$

**۶ مکان زاویه‌ای یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی یک چرخ دوار از رابطه‌ی $\theta = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$ به دست می‌آید، که در آن $\theta$ برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان‌های (الف) $t = 2.0\ \text{s}$ و (ب) $t = 4.0\ \text{s}$، چقدر است؟ (پ) دربازه‌ی زمانی‌ای که از $t = 2.0\ \text{s}$ آغاز و در $t = 4.0\ \text{s}$ پایان می‌یابد، شتاب زاویه‌ای متوسط چقدر است؟ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای در (ت) لحظه‌ی آغازی و (ث) در لحظه‌ی پایانی این بازه‌ی زمانی، چقدر است؟

**حل:** اگر یکاهای کمیت‌ها را به طور صریح بیان کنیم، تابع داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\theta = (4.0\ \text{rad/s})t - (3.0\ \text{rad/s}^2)t^2 + (1.0\ \text{rad/s}^3)t^3$$

البته، معمولاً در محاسبات خود ضرایب را با رقم‌های معنی‌دار مناسب نمی‌نویسیم.

(الف) از معادله‌ی ۱۰-۶ داریم

$$\omega = \frac{d}{dt}(4t - 3t^2 + t^3) = 4 - 6t + 3t^2$$

در نتیجه به ازای $t = 2\ \text{s}$، $\omega_2 = 4.0\ \text{rad/s}$ به دست می‌آید.

(ب) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) را به ازای $t = 4\text{s}$ حساب می‌کنیم که داریم $\omega_4 = 28\ \text{rad/s}$.

(پ) شتاب زاویه‌ای متوسط را از معادله‌ی ۱۰-۷ به دست می‌آوریم:

$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_4 - \omega_2}{4 - 2} = 12\ \text{rad/s}^2$$

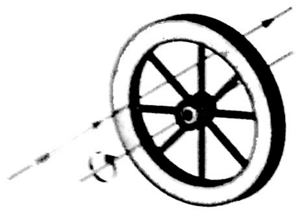
(ت) شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(4 - 6t + 3t^2) = -6 + 6t$$

که به ازای $t = 2\ \text{s}$، مقدار $\alpha_2 = 6.0\ \text{rad/s}^2$ حاصل می‌شود.

**(ث) رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (ت) را به ازای $t = 4\text{s}$ حساب می‌کنیم و $\alpha_4 = 18\ \text{rad/s}^2$ را به دست می‌آوریم. توجه کنید که پاسخ $\alpha_{avg}$ با مقدار میانگین حسابی $\alpha_2$ و $\alpha_4$ برابر است، اما همیشه این طور نیست.**

*** ۷ چرخ شکل ۱۰-۳۰، هشت پره به فاصله‌های مساوی دارد و شعاع آن $30\,cm$ است. چرخ روی محور ثابتی سوار شده است و با سرعت $2/5\,rev/s$ می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول $20\,cm$ را به موازات محور دوران طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ پره‌ای از چرخ بگذرد. فرض می‌کنیم پیکان و پره‌ها به قدر کافی باریک‌اند. (الف) کمینه‌ی تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای را در فاصله‌ی میان محور و کناره‌ی چرخ نشانه بگیریم؟ اگر این موضوع مهم است، بهترین نقطه کجاست؟



**شکل ۱۰-۳۰** مسئله‌ی ۷.

**حل:** (الف) برای آن‌که پیکان به پره‌ها برخورد نکند، باید در مدت کمتر از

$$\Delta t = \frac{1/8\,rev}{2/5\,rev/s} = 0/050\,s$$

از چرخ عبور کند. پس، تندی کمینه‌ی پیکان برابر است با

$$v_{min} = \frac{20\,cm}{0/050\,s} = 400\,cm/s = 4/0\,m/s$$

(ب) خیر، محاسبات بالا ربطی به نقطه‌ی نشانه‌گیری ندارند.

*** ۸ شتاب زاویه‌ای یک چرخ $\alpha = 6/0t^4 - 4/0t^2$ است، که در آن $\alpha$ برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و $t$ برحسب ثانیه است. این چرخ در زمان $t = 0$ دارای سرعت زاویه‌ای $+2/0\,rad/s$ و مکان زاویه‌ای $+1/0\,rad$ است. رابطه‌های مربوط به (الف) سرعت زاویه‌ای (برحسب $rad/s$) و (ب) مکان زاویه‌ای (برحسب $rad$) را به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) بنویسید.

**حل:** (الف) از رابطه‌ی $\alpha = 6/0t^4 - 4/0t^2$ نسبت به زمان انتگرال می‌گیریم، و در نظر می‌گیریم که سرعت زاویه‌ای آغازی $2/0\,rad/s$ است. سرعت زاویه‌ای برابر است با

$$\omega = 1/20t^5 - 1/33t^3 + 2/0$$

(ب) اکنون یک بار دیگر انتگرال می‌گیریم (و به یاد داریم که $\theta_0 = 1$ است):

$$\theta = 0/20t^6 - 0/33t^4 + 2/0t + 1/0$$

## پودمان ۱۰-۲ حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

* ۹ استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای $12/60\,rad/s$ به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. اگر این استوانه با آهنگ ثابت $4/20\,rad/s^2$ حرکت دورانی‌اش کند شود، (الف) چه مدت طول می‌کشد و (ب) چه‌زاویه‌ای را طی می‌کند، تا متوقف شود؟

**حل:** (الف) به‌ازای $\omega = 0$ و $\alpha = -4/2\,rad/s^2$ ازمعادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم $t = -\omega_0/\alpha = 3/00\,s$.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۴ داریم $\theta - \theta_0 = -\omega_0^2/2\alpha = 18/9\,rad$.

* ۱۰ قرصی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت به‌دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در مدت ۵/۰ ثانیه به اندازه‌ی ۲۰ رادیان می‌چرخد. در این مدت، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای متوسط قرص، چقدر است؟ (پ) در پایان مدت ۵/۰ ثانیه سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای قرص چقدر است؟ (ت) اگرشتاب زاویه‌ای تغییر نکند، در مدت ۵/۰ ثانیه‌ی بعدی قرص تحت چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

**حل:** جهت دوران را مثبت در نظر می‌گیریم، یعنی (چون قرص از حال سکون شروع به دوران می‌کند) مقدار کمیت‌ها (جابه‌جایی زاویه‌ای، شتاب‌ها، و غیره) مثبت است.

(الف) شتاب زاویه‌ای از معادله‌ی ۱۰-۱۳ به دست می‌آید:

$$20\,rad = \frac{1}{2}\alpha(5/0\,s)^2 \Rightarrow \alpha = 1/6\,rad/s^2$$

(ب) سرعت زاویه‌ای متوسط از معادله‌ی ۱۰-۵ به دست می‌آید:

$$\omega_{avg} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{20\,rad}{5/0\,s} = 4/0\,rad/s$$

(پ) سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در زمان $t = 5/0\,s$ با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۲ برابر است با

$$\omega = (1/6\,rad/s^2)(5/0\,s) = 8/0\,rad/s$$

(ت) بر طبق معادله‌ی ۱۰-۱۳، جابه‌جایی زاویه‌ای در مدت زمان $t = 10\,s$ برابر است با

$$\theta = \omega_{\circ} + \frac{۱}{۲}\alpha t^{۲} = ۰ + \frac{۱}{۲}(۱/۶\,rad/s^{۲})(۱۰s)^{۲} = ۸۰rad$$

بنابراین، جابه‌جایی در بین لحظات $t = ۵s$ و $t = ۱۰s$ برابر است با: $\Delta\theta = ۸۰rad - ۸/۰rad = ۷۲rad$.

*** ۱۱** حرکت قرصی که در آغاز در حال دوران با تندی زاویه‌ای $۱۲۰\,rad/s$ است، با شتاب زاویه‌ای ثابت $۴/۰\,rad/s^{۲}$ کُند می‌شود. (الف) قرص پس از چه مدت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت قرص تحت چه زاویه‌ای چرخیده است؟

**حل:** جهت دوران آغازی را مثبت در نظر می‌گیریم. در نتیجه به‌ازای $\omega_{\circ} = +۱۲۰\,rad/s$ و $\omega = ۰$ (زیرا قرص در لحظه‌ی $t$ متوقف می‌شود)، مقدار شتاب زاویه‌ای («شتاب کند کننده») منفی خواهد بود: $\alpha = -۴/۰\,rad/s^{۲}$.

(الف) برای پیدا کردن $t$ از معادله‌ی ۱۰-۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$\omega = \omega_{\circ} + \alpha t \Rightarrow t = \frac{۰ - ۱۲۰rad/s}{-۴/۰rad/s^{۲}} = ۳۰s$$

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{۱}{۲}(\omega_{\circ} + \omega)t = \frac{۱}{۲}(۱۲۰rad + ۰)(۳۰s) = ۱/۸ \times ۱۰^{۳}\,rad$$

البته اگر بخواهیم فقط از اطلاعات داده شده استفاده کنیم، می‌توانیم معادله‌ی ۱۰-۱۴ را نیز به کار ببریم و برای به دست آوردن $\theta$، از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده نکنیم. اگر بتوانیم از نتیجه‌ی قسمت (الف) استفاده کنیم، در آن صورت هر معادله‌ی زاویه‌ای در جدول ۱۰-۱ (به جز معادله‌ی ۱۰-۱۲) را می‌توان برای پیدا کردن $\theta$ به‌کار ببریم.

*** ۱۲** تندی زاویه‌ای موتور یک خودرو با آهنگی ثابت در مدت ۱۲ ثانیه از $۱۲۰۰\,rev/min$ به $۳۰۰۰\,rev/min$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای موتور برحسب دور بر مجذور دقیقه چقدر است؟ (ب) در این بازه‌ی زمانی ۱۲ ثانیه موتور چند دور چرخیده است؟

**حل:** (الف) جهت دوران موتور را مثبت در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۲ داریم

$$\omega = \omega_{\circ} + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{(۳۰۰۰ - ۱۲۰۰)rev/min}{(۱۲/۶۰)min} = ۹/۰ \times ۱۰^{۳}\,rev/min^{۲}$$

(ب) و از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{۱}{۲}(\omega_{\circ} + \omega)t = \frac{۱}{۲}(۱۲۰۰rev/min + ۳۰۰۰rev/min)\left(\frac{۱۲}{۶۰}min\right) = ۴/۲ \times ۱۰^{۲}\,rev$$

**** ۱۳** چرخ لنگری از تندی زاویه‌ای $۱/۵\,rad/s$ تا توقف کامل ۴۰ دور می‌زند. (الف) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه‌ای، چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف شود؟ (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ (پ) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول چرخ از ۴۰ دور چقدر است؟

**حل:** سرعت زاویه‌ای چرخ در لحظه‌ی $t = ۰$، $\omega_{\circ} = +۱/۵rad/s = +۰/۲۳۹rev/s$، و مقدار شتاب زاویه‌ای آن ثابت و $\alpha < ۰$ است، که انتخاب جهت مثبت را نشان می‌دهد. در مدت زمان $t_۱$ جابه‌جایی زاویه‌ای چرخ (نسبت به سمتگیری آن در لحظه‌ی $t = ۰$)، $\theta_۱ = +۲۰rev$ و در مدت زمان $t_۲$ جابه‌جایی زاویه‌ای آن $\theta_۲ = +۴۰rev$ و سرعت زاویه‌ای آن $\omega_۲ = ۰$ است.

(الف) مقدار $t_۲$ را از معادله‌ی ۱۰-۱۵ به دست می‌آوریم:

$$\theta_۲ = \frac{۱}{۲}(\omega_{\circ} + \omega_۲)t_۲ \Rightarrow t_۲ = \frac{۲(۴۰rev)}{۰/۲۳۹rev/s} = ۳۳۵s$$

$$t_۲ \approx ۳/۴ \times ۱۰^{۲}\,s$$

(ب) از هر معادله‌ای در جدول ۱۰-۱ که شامل $\alpha$ است می‌توان برای پیدا کردن شتاب زاویه‌ای استفاده کرد، که ما معادله‌ی ۱۰-۱۶ را انتخاب می‌کنیم:

$$\theta_۲ = \omega_۲ t_۲ - \frac{۱}{۲}\alpha t_۲^{۲}$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{۲(۴۰rev)}{(۳۳۵s)^{۲}} = -۷/۱۲ \times ۱۰^{-۴}\,rev/s^{۲}$$

$$\alpha = -۴/۵ \times ۱۰^{-۳}\,rad/s^{۲}$$

(پ) با استفاده از معادله‌ی $\theta_۱ = \omega_{\circ}t_۱ + \frac{۱}{۲}\alpha t_۱^{۲}$ (معادله‌ی ۱۰-۱۳) و فرمول معادله‌ی درجه دوم، داریم

$$t_۱ = \frac{-\omega_{\circ} \pm \sqrt{\omega_{\circ}^{۲} + ۲\theta_۱\alpha}}{\alpha}$$

$$= \frac{-(۰/۲۳۹rev/s) \pm \sqrt{(۰/۲۳۹rev/s)^{۲} + ۲(۲۰rev)(-۷/۱۲\times۱۰^{-۴}\,rev/s^{۲})}}{-۷/۱۲\times۱۰^{-۴}\,rev/s^{۲}}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی مثبت خواهیم داشت: ۹۸s و ۵۷۲s. چون پرسش مربوط به حالت $t_۱ < t_۲$ است، لذا نتیجه‌ی درست $t_۱ = ۹۸s$ است.

**۱۴ قرصی از حال سکون به حرکت در می‌آید و با شتاب زاویه‌ای ثابت به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در یک زمان با تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌چرخد و ۶۰ دور بعد تندی زاویه‌ای‌اش به $15\,rev/s$ می‌رسد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور بعدی، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$، و (ت) عده‌ی دورهایی که قرص از حال سکون تا زمان رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌زند.

**حل:** قرص از حال سکون $(\omega_0 = 0)$ در لحظه‌ی $t = 0$ شروع به دوران می‌کند و دارای شتاب یکنواخت $\alpha > 0$ می‌شود، که ما جهت دوران قرص را مثبت در نظر می‌گیریم. در لحظه‌ی $t_1$ سرعت زاویه‌ای قرص $\omega_1 = +10\,rev/s$، و در لحظه‌ی $t_2$ سرعت زاویه‌ای آن $\omega_2 = +15\,rev/s$ است. در بین لحظات $t_1$ و $t_2$، یعنی $\Delta t = t_2 - t_1$، قرص به اندازه‌ی $\Delta\theta = 60\,rev$ می‌چرخد.

(الف) شتاب زاویه‌ای $\alpha$ را از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آوریم

$$\omega_2^2 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{(15\,rev/s)^2 - (10\,rev/s)^2}{2(60\,rev)} = 1.04\,rev/s^2 \approx 1.0\,rev/s^2$$

(ب) مقدار $\Delta t$ را از معادله‌ی ۱۰-۱۵ به دست می‌آوریم:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{2(60\,rev)}{10\,rev/s + 15\,rev/s} = 4.8\,s$$

(پ) مقدار $t_1$ را از معادله‌ی ۱۰-۱۲ به دست می‌آوریم:

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{10\,rev/s}{1.04\,rev/s^2} = 9.6\,s$$

(ت) از هر معادله‌ای در جدول ۱۰-۱ که شامل $\theta$ است می‌توان برای پیدا کردن $\theta_1$ (جابه‌جایی زاویه‌ای در بازه‌ی زمانی $0 \le t \le t_1$) استفاده کرد؛ ما معادله‌ی ۱۰-۱۴ را انتخاب می‌کنیم:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{(10\,rev/s)^2}{2(1.04\,rev/s^2)} = 48\,rev$$

**۱۵ شتاب زاویه‌ای ثابت چرخی $3.0\,rad/s^2$ است. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه زاویه‌ای به اندازه‌ی ۱۲۰ رادیان می‌پیماید. چرخ با این فرض که از حال سکون شروع به چرخش کرده باشد، تا آغاز بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه چه مدت در حال حرکت بوده است؟

**حل:** چرخی داریم که با شتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد. بنابراین برای تحلیل حرکت این چرخ می‌توانیم از معادلات جدول ۱۰-۱ استفاده کنیم.

چون چرخ از حال سکون به راه می‌افتد، جابه‌جایی زاویه‌ای آن برحسب زمان، به صورت $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ است. فرض می‌کنیم $t_1$ لحظه‌ی شروع بازه‌ی زمانی باشد، در نتیجه $t_2 = t_1 + 4.0\,s$ است. در این مدت‌ها جابه‌جایی‌های زاویه‌ای متناظر عبارت‌اند از

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \ , \ \theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t_2^2$$

چون $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ معلوم است، $t_1$ را می‌توان به دست آورد که نشان می‌دهد چرخ تا شروع بازه‌ی زمانی $4.0\,s$ در حرکت بوده است. از ترکیب دو رابطه‌ی بالا داریم

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}\alpha(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}\alpha(t_2 + t_1)(t_2 - t_1)$$

که به ازای $\Delta\theta = 120\,rad$، $\alpha = 3.0\,rad/s^2$ و $t_2 - t_1 = 4.0\,s$، داریم

$$t_2 + t_1 = \frac{2(\Delta\theta)}{\alpha(t_2 - t_1)} = \frac{2(120\,rad)}{(3.0\,rad/s^2)(4.0\,s)} = 20\,s$$

از حل دو معادله، $t_2 = 12.0\,s$ و $t_1 = 8.0\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین، چرخ تا آغاز بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه، به مدت $8.0\,s$ در حال حرکت بوده است.

***توجه:*** ما می‌توانیم این نتیجه را از محاسبه‌ی صریح $\theta_1$ و $\theta_2$ نیز به دست آوریم:

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 = \frac{1}{2}(3.0\,rad/s^2)(8.0\,s)^2 = 96\,rad$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t_2^2 = \frac{1}{2}(3.0\,rad/s^2)(12.0\,s)^2 = 216\,rad$$

در واقع تفاضل این دو مقدار $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 120\,rad$ است.

**۱۶ یک چرخ و فلک از حال سکون با شتاب زاویه‌ای $1.50\,rad/s^2$ می‌چرخد. چه مدت طول می‌کشد تا (الف) ۲٫۰۰ دور اول و (ب) ۲٫۰۰ دور بعدی، را بزند؟

**حل:** (الف) از معادله ۱۰-۱۳ داریم

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \frac{1}{2}(1.5\,rad/s^2)t_1^2$$

در این‌جا $\theta - \theta_0 = (2\,rev)(2\pi\,rad/rev)$ است. در نتیجه $t_1 = 4.10\,s$ به دست می‌آید.

(ب) ما می‌توانیم مدت زمان چهار دور کامل را (با استفاده از همان معادله برای پیدا کردن زمان $t_2$ جدید) پیدا کنیم و سپس نتیجه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) برای $t_1$ را از آن کم کنیم تا پاسخ مورد نظر به دست آید:

$$(۴\,rev)(۲\pi\,rad/rev) = ۰ + \frac{۱}{۲}(۱/۵\,rad/s^۲)t_2^۲ \Rightarrow t_2 = ۵/۸۰\,s$$

بنابراین، پاسخ برابر است با $۵/۸۰\,s - ۴/۱۰\,s \approx ۱/۷\,s$.

**۱۷ در زمان $t = ۰$، یک چرخ لنگر دارای سرعت زاویه‌ای $۴/۷\,rad/s$، شتاب زاویه‌ای ثابت $-۰/۲۵\,rad/s^۲$ و زاویه‌ی خط مرجع $\theta_0 = ۰$ است. (الف) زاویه‌ی بیشینه‌ی $\theta_{max}$، که خط مرجع در جهت مثبت می‌پیماید، چقدر است؟ در چه زمان‌هایی خط مرجع، (ب) برای اولین بار و (پ) برای دومین بار در مکان $\theta = \frac{۱}{۲}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد؟ (ت) درچه زمان منفی و (ث) در چه زمان مثبت، خط مرجع در مکان $\theta = ۱۰/۵\,rad$ خواهد بود؟ (ج) نمودار $\theta$ برحسب $t$ را رسم و پاسخ‌های (الف) تا (ث) را بر روی نمودار مشخص کنید.

**حل:** در این مسئله جهت مثبت (به طور ضمنی) در جهت دوران انتخاب شده است. بزرگی شتاب زاویه‌ای $۰/۲۵\,rad/s^۲$ در جهت منفی، در یک بازه‌ی زمانی طولانی، از جمله مقادیر منفی زمان ($t$)، ثابت فرض شده است.

(الف) مقدار $\theta_{max}$ را متناظر با شرط $\omega = ۰$ در نظر می‌گیریم (موقعی $\omega = ۰$ می‌شود که حرکت چرخ در جهت مثبت معکوس می‌شود و چرخ در جهت منفی می‌چرخد). مقدار $\theta_{max}$ را از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آوریم:

$$\theta_{max} = -\frac{\omega_0^۲}{۲\alpha} = -\frac{(۴/۷\,rad/s)^۲}{۲(-۰/۲۵\,rad/s^۲)} = ۴۴\,rad$$

(ب) ما مقادیر $t_1$ مربوط به جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta_1 = ۲۲\,rad$ (یا مقدار دقیق $\theta = ۲۲/۰۹\,rad$) را (نسبت به سمتگیری چرخ در نقطه‌ی $t = ۰$) پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۳ و فرمول معادله‌ی درجه‌ی دوم، داریم

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{۱}{۲}\alpha t_1^۲ \Rightarrow t_1 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^۲ + ۲\theta_1\alpha}}{\alpha}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی $۵/۵\,s$ و $۳۲\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین، اولین بار که خط مرجع در مکان $\theta_1 = ۲۲\,rad$ قرار می‌گیرد، مربوط به زمان $t = ۵/۵\,s$ است.

(پ) دومین بار که خط مرجع در مکان $\theta_1 = ۲۲\,rad$ قرار می‌گیرد، مربوط به زمان $t = ۳۲\,s$ است.

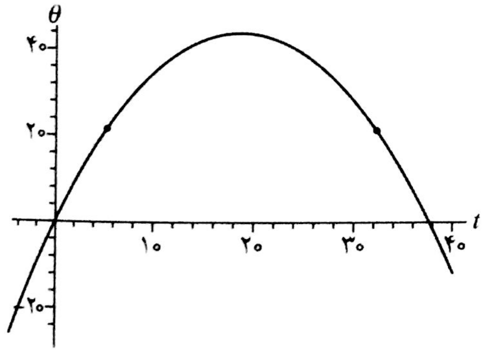
(ت) ما مقادیر $t_2$ مربوط به جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta_2 = -۱۰/۵\,rad$ (نسبت به سمتگیری چرخ در لحظه‌ی $t = ۰$) را پیدا می‌کنیم. با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۳ و مول معادله‌ی درجه دوم، داریم

$$\theta_2 = \omega_0 t_2 + \frac{۱}{۲}\alpha t_2^۲ \Rightarrow t_2 = \frac{-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^۲ + ۲\theta_2\alpha}}{\alpha}$$

در نتیجه دو ریشه‌ی $-۲/۱\,s$ و $۴۰\,s$ به دست می‌آیند. بنابراین در لحظه‌ی $t = -۲/۱\,s$ خط مرجع در مکان $\theta_2 = -۱۰/۵\,rad$ قرار می‌گیرد.

(ث) در لحظه‌ی $t = ۴۰\,s$، خط مرجع در مکان $\theta_2 = -۱۰/۵\,rad$ قرار می‌گیرد.

(ج) نمودار $\theta$ برحسب $t$ در زیر نشان داده شده است (نقطه‌های پیدا شده در قسمت‌های قبلی را با نقطه‌های کوچک مشخص کرده‌ایم).




***۱۸ تپ اختر یک ستاره‌ی نوترونی در حال چرخش تند است که، مانند گسیل باریکه‌ی نور توسط فانوس دریایی، باریکه‌ای از موج‌های رادیویی گسیل می‌کند. در هر دور این ستاره در روی زمین یک تپ دریافت می‌شود. دوره‌ی تناوب دوران، $T$، با اندازه‌گیری زمان بین تپ‌ها به دست می‌آید. در حال حاضر، دوره‌ی تناوب دوران تپ اختر واقع در سحابی خرچنگ $T = ۰/۰۳۳\,s$ است و این مقدار با آهنگ $۱/۲۶\times۱۰^{-۵}\,s/y$ در حال افزایش است. (الف) شتاب زاویه‌ای تپ اختر $\alpha$، چقدر است؟ (ب) اگر $\alpha$ ثابت باشد، دوران تپ اختر چند سال دیگر متوقف خواهد شد؟ (پ) این تپ اختر از

انفجار یک ابرنواختر در سال ۱۰۵۴/۲۳۳ به وجود آمده است. با فرض ثابت بودن $\alpha$، $T$ آغازی را پیدا کنید.

**حل:** (الف) یک دور کامل معادل جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta = ۲\pi\ rad$ است، در نتیجه سرعت زاویه‌ای از رابطه‌ی $\omega = \Delta\theta / T = ۲\pi / T$ به دست می‌آید. شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{۲\pi}{T^{۲}}\frac{dT}{dt}$$

برای تپ اختر معرفی شده در این مسئله، داریم

$$\frac{dT}{dt} = \frac{۱/۲۶\times ۱۰^{-۵}\ s/y}{۳/۱۶\times ۱۰^{۷}\ s/y} = ۴/۰۰\times ۱۰^{-۱۳}$$

در نتیجه شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = -\left(\frac{۲\pi}{(۰/۰۳۳s)^{۲}}\right)(۴/۰۰\times ۱۰^{-۱۳}) = -۲/۳\times ۱۰^{-۹}\ rad/s^{۲}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که شتاب زاویه‌ای در خلاف جهت سرعت زاویه‌ای است و سرعت تپ اختر کاهش می‌یابد.

(ب) از رابطه‌ی $\omega = \omega_{۰} + \alpha t$ و به ازای $\omega = ۰$، مدت زمان لازم برای توقف تپ اختر را به دست می‌آوریم

$$t = -\frac{\omega_{۰}}{\alpha} = -\frac{۲\pi}{\alpha T} = -\frac{۲\pi}{(-۲/۳\times ۱۰^{-۹}\ rad/s^{۲})(۰/۰۳۳s)}$$

$$= ۸/۳\times ۱۰^{۱۰}\ s \approx ۲/۶\times ۱۰^{۳}\ \text{سال}$$

(پ) این تپ اختر ۹۳۸ = ۱۰۵۴ − ۱۹۹۲ سال پیش به وجود آمده است که معادل $(۹۳۸y)(۳/۱۶\times ۱۰^{۷}\ s/y) = ۲/۹۰\times ۱۰^{۱۰}\ s$ است. در آن زمان سرعت زاویه‌ای آن

$$\omega = \omega_{۰} + \alpha t + \frac{۲\pi}{T} + \alpha t$$

$$= \frac{۲\pi}{۰/۰۳۳s} + (-۲/۳\times ۱۰^{-۹}\ rad/s^{۲})(-۲/۹۶\times ۱۰^{۱۰}\ s) = ۲۵۸\ rad/s$$

و دوره‌ی تناوب آن به صورت زیر بوده است.

$$T = \frac{۲\pi}{\omega} = \frac{۲\pi}{۲۵۸\ rad/s} = ۲/۴\times ۱۰^{-۲}\ s$$

## پودمان ۱۰-۳ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

*** ۱۹ فضاپیمایی مسیری دایره‌ای به شعاع ۳۲۲۰ km را با تندی ۲۹۰۰۰ km/h می‌پیماید. بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) شتاب شعاعی، و (پ) شتاب مماسی فضاپیما، چقدر است؟**

**حل:** (الف) سرعت زاویه‌ای (که مثبت فرض می‌شود) از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به دست می‌آید

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{(۲/۹۰\times ۱۰^{۴}\ km/h)(۱/۰۰۰h/۳۶۰۰s)}{۳/۲۲\times ۱۰^{۳}\ km}$$

$$= ۲/۵۰\times ۱۰^{-۳}\ rad/s$$

(ب) شتاب شعاعی (یا مرکزگرا) از معادله‌ی ۱۰-۲۳ حساب می‌شود

$$a_r = \omega^{۲} r = (۲/۵۰\times ۱۰^{-۳}\ rad/s)^{۲}(۳/۲۲\times ۱۰^{۶}\ m) = ۲۰/۲\ m/s^{۲}$$

(پ) با فرض ثابت بودن سرعت زاویه‌ای، شتاب زاویه‌ای و شتاب مماسی صفرند، زیرا

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = ۰ \quad \text{و} \quad a_t = r\alpha = ۰$$

*** ۲۰ شیئی به دور محور ثابتی می‌چرخد و مکان زاویه‌ای یک خط مرجع روی شیء از رابطه‌ی $\theta = ۰/۴۰ e^{۲t}$ به دست می‌آید، که در آن $\theta$ برحسب رادیان و $t$ برحسب ثانیه است. نقطه‌ای را بر روی شیء به فاصله‌ی ۶/۰ cm از محور دوران در نظر بگیرید. در زمان $t = ۰$، بزرگی (الف) مؤلفه‌ی مماسی شتاب و (ب) مؤلفه‌ی شعاعی شتاب نقطه، چیست؟**

**حل:** تابع $\theta = \xi e^{\beta t}$ که در آن $\xi = ۰/۴۰\ rad$ و $\beta = ۲s^{-۱}$ است، مختصه‌ی زاویه‌ای یک خط (همه‌ی نقاط روی این خط در یک زمان تحت یک زاویه قرار دارند) روی شیئی را توصیف می‌کند. مشتقات این تابع نسبت به زمان عبارت‌اند از

$$\frac{d\theta}{dt} = \xi\beta e^{\beta t} \quad \text{و} \quad \frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} = \xi\beta^{۲} e^{\beta t}.$$

(الف) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۲ داریم

$$a_t = \alpha r = \frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}} r = ۹/۶\ cm/s^{۲}$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۳ داریم

$$a_r = \omega^{۲} r = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲} r = ۴/۸\ cm/s^{۲}$$

*** ۲۱ در بین سال‌های ۱۹۱۱ و ۱۹۹۰، نوک برج کج پیزا در ایتالیا با آهنگ متوسط ۱/۲ mm/y به سمت جنوب حرکت کرد. ارتفاع برج ۵۵ متر است. تندی زاویه‌ای متوسط نوک برج به دور پایه‌ی آن، برحسب رادیان بر ثانیه، چقدر است؟**

**حل:** آهنگ معلوم $۱/۲\times ۱۰^{-۳}\ m/y$ را تندی خطی نوک برج در نظر می‌گیریم؛ این مقدار را مؤلفه‌ی افقی تندی خطی برج نیز

می‌توان در نظر گرفت، اما اختلاف بین این تعبیرها ناچیز است.

بنابراین، از معادله‌ی ۱۰-۱۸ داریم

$$\omega = \frac{1.2\times10^{-3}\ m/y}{55m} = 2.18\times10^{-3}\ rad/y$$

چون هر سال تقریباً معادل $3.16\times10^{7}$ ثانیه است، داریم

$$\omega = 6.9\times10^{-13}\ rad/s$$

* **۲۲** فضانوردی درون یک دستگاه مرکز گریز مورد آزمون قرار می‌گیرد. شعاع دستگاه $10\ m$ است و دستگاه طبق رابطه‌ی $\theta = 0.30t^2$، که در آن $t$ برحسب ثانیه و $\theta$ برحسب رادیان است، شروع به دوران می‌کند. در زمان $t = 5.0\ s$، بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) سرعت خطی، (پ) شتاب مماسی، و (ت) شتاب شعاعی فضانورد، چیست؟

**حل:** (الف) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۶، سرعت زاویه‌ای فضانورد در لحظه‌ی $t = 5.0\ s$ به دست می‌آید

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=5.0} = \frac{d}{dt}(0.30t^2)\Big|_{t=5.0} = 2(0.30)(5.0)$$

$$= 3.0\ rad/s$$

(ب) تندی خطی در لحظه‌ی $t = 5.0\ s$ از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به‌دست می‌آید

$$v = \omega r = (3.0\ rad/s)(10m) = 30m/s$$

(پ) شتاب زاویه‌ای فضانورد از معادله‌ی ۱۰-۸ به دست می‌آید

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(0.60t) = 0.60\ rad/s^2$$

بنابراین، شتاب مماسی در لحظه‌ی $t = 5.0\ s$ از معادله‌ی ۱۰-۲۲ حساب می‌شود

$$a_t = r\alpha = (10m)(0.60\ rad/s^2) = 6.0\ m/s^2$$

(ت) شتاب شعاعی (مرکزگرا) را از معادله‌ی ۱۰-۲۳ حساب می‌کنیم:

$$a_r = \omega^2 r = (3.0\ rad/s)^2(10m) = 90m/s^2$$

* **۲۳** چرخ لنگری به قطر $1.20m$ با تندی زاویه‌ای $200\ rev/min$ می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای چرخ برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟ (پ) چه شتاب زاویه‌ای ثابتی (برحسب دور بر مجذور دقیقه) باعث می‌شود تندی زاویه‌ای چرخ در مدت $60.0$ ثانیه به $1000\ rev/min$ برسد؟ (ت) چرخ در این مدت $60.0$ ثانیه چند دور می‌زند؟

**حل:** رابطه‌ی تندی خطی چرخ و تندی زاویه‌ای آن به صورت $v = \omega r$ است، که در آن $r$ شعاع چرخ است. وقتی چرخ شتاب می‌گیرد، تندی زاویه‌ای آن در هر لحظه‌ی بعدی برابر است با $\omega = \omega_0 + \alpha t$.

(الف) تندی زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega_0 = \frac{(200rev/min)(2\pi rad/rev)}{60s/min} = 20.9\ rad/s$$

(ب) تندی خطی چرخ به ازای $r = (1.20m)/2 = 0.60m$ از معادله‌ی ۱۰-۱۸ به دست می‌آید

$$v = r\omega_0 = (0.60m)(20.9\ rad/s) = 12.5\ m/s$$

(پ) به ازای $t = 1min$، $\omega = 1000rev/min$ و $\omega_0 = 200\ rev/min$، شتاب مورد نظر را از معادله‌ی ۱۰-۱۲ به‌دست می‌آوریم

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = 800\ rev/min^2$$

(ت) با استفاده از همان مقادیر به کار رفته در قسمت (پ)، از معادله‌ی ۱۰-۱۵ داریم

$$\theta = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

$$= \frac{1}{2}(200rev/min + 1000rev/min)(1.0\ min) = 600\ rev$$

***توجه:*** روش دیگر برای حل کردن قسمت (ت)، استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۱۳ است

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 0 + (200rev/min)(1.0\ min) + \frac{1}{2}(800rev/min^2)(1.0\ min)^2$$

$$= 600\ rev$$

* **۲۴** وقتی یک صفحه‌ی گرامافون از جنس وینیل با چرخیدن **به‌کار می‌افتد**، یک شیار تقریباً دایره‌ای روی صفحه در زیر یک **سوزن می‌لغزد**. برآمدگی‌های موجود در این شیار سبب می‌شوند سوزن در درون شیار نوسان کند. دستگاه گرامافون این نوسان‌ها را به **سیگنال‌های** الکتریکی و سپس به صوت تبدیل می‌کند.

فرض کنید صفحه با آهنگ $33\frac{1}{3}\ rev/min$ می‌چرخد، شعاع شیار ۱۰٫۰cm است، و فاصله‌ی یکنواخت برآمدگی‌های شیار ۱٫۸۵ mm است. این برآمدگی‌ها با چه آهنگی (عده‌ی برخورد بر ثانیه) به سوزن برخورد می‌کنند؟

**حل:** مقدار $33\frac{1}{3}\ rev/min$ را به رادیان بر ثانیه تبدیل می‌کنیم: $\omega = 3.49\ rad/s$. رابطه‌ی $v = \omega r$ (معادله‌ی ۱۰-۱۸) را با $\Delta t = d/v$ که $\Delta t$ مدت زمان بین افتادن سوزن در برآمدگی‌ها (به فاصله‌ی $d$ از یکدیگر) ترکیب می‌کنیم و آهنگ برخورد برآمدگی به سوزن را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\omega r}{d} \approx 189/s$$

** ۲۵ (الف) تندی زاویه‌ای $\omega$، برای نقطه‌ای از سطح زمین که در عرض جغرافیایی ۴۰ درجه‌ی شمالی به دور محور قطبی زمین می‌چرخد، چقدر است؟ (ب) تندی خطی این نقطه $v$، چقدر است؟ برای نقطه‌ای از استوا، (پ) مقدار $\omega$ و (ت) مقدار $v$، چیست؟

**حل:** تندی خطی نقطه‌ای از سطح زمین به فاصله‌ی آن نقطه تا محور دوران بستگی دارد. برای به دست آوردن این تندی خطی، از رابطه‌ی $v = \omega r$ استفاده می‌کنیم که $r$ شعاع مدار است. نقطه‌ای از سطح زمین در عرض جغرافیایی $40°$ در روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع $r = R\cos 40°$ حرکت می‌کند که در آن $R$ شعاع زمین ($6.4\times10^{6}\ m$) است. از طرف دیگر در استوا $r = R$ است.

(الف) زمین در هر شبانه‌روز یک دور کامل می‌زند و هر شبانه‌روز برابر است با $(24h)(3600s/h) = 8.64\times10^{4}\ s$، در نتیجه تندی زاویه‌ای زمین برابر است با

$$\omega = \frac{2\pi\ rad}{8.64\times10^{4}\ s} = 7.3\times10^{-5}\ rad/s$$

(ب) در عرض جغرافیایی $40°$، تندی خطی زمین برابر است با

$$v = \omega(R\cos 40°)$$

$$=(7.3\times10^{-5}\ rad/s)(6.4\times10^{6}\ m)\cos 40° = 3.5\times10^{2}\ m/s$$

(پ) در استوا (و در تمام نقاط دیگر روی زمین) مقدار $\omega$ یکسان ($7.3\times10^{-5}\ rad/s$) است.

(ت) عرض جغرافیایی در استوا $0°$ و تندی خطی در آن‌جا برابر است با

$$v = \omega R = (7.3\times10^{-5}\ rad/s)(6.4\times10^{6}\ m) = 4.6\times10^{2}\ m/s$$

**توجه:** تندی خطی در قطب‌های زمین صفر است زیرا $r = R\cos 90° = 0$.

** ۲۶ چرخ لنگر ماشین بخاری با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۶۰ rev/min می‌چرخد. وقتی بخار قطع می‌شود، اصطکاک یاتاقان‌ها و مقاومت هوا سبب می‌شود چرخ پس از مدت ۲٫۲ ساعت متوقف شود. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ در حین کند شدن حرکت، برحسب دور بر مجذور دقیقه، چقدر است؟ (ب) چرخ پیش از توقف چند دور می‌زند؟ (پ) در لحظه‌ای که چرخ با تندی زاویه‌ای ۷۵ rev/min می‌چرخد، مؤلفه‌ی مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ به فاصله‌ی ۵۰cm از محور دوران چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خطی برایند نقطه‌ی مربوط به قسمت (پ) چقدر است؟

**حل:** (الف) شتاب زاویه‌ای برابر است با

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-160\ rev/min}{(2.2\ h)(60\ min/1h)} = -1.21\ rev/min^{2}$$

(ب) به ازای $t = (2.2)(60) = 132\ min$، تعداد دورها از معادله‌ی ۱۰-۱۳ به دست می‌آید:

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^{2}$$

$$= (160\ rev/min)(132\ min) + \frac{1}{2}(-1.21\ rev/min^{2})(132\ min)^{2}$$

$$= 5.4\times10^{3}\ rev$$

(پ) شتاب مماسی به ازای $r = 500\ mm$ برابر است با

$$a_t = \alpha r = (-1.21\ rev/min^{2})\left(\frac{2\pi\ rad}{1\ rev}\right)\left(\frac{1\ min}{60\ s}\right)^{2}(500\ mm)$$

در نتیجه $a_t = -1.06\ mm/s^{2}$ به دست می‌آید. توجه کنید که این شتاب به سرعت زاویه‌ای داده شده بستگی ندارد.

(ت) تندی زاویه‌ای چرخ لنگر برابر است با

$$\omega = (75\ rev/min)(2\pi\ rad/rev)(1\ min/60\ s)$$

$$= 7.85\ rad/s$$

به ازای $r = 0.50\ m$، شتاب شعاعی (یا مرکزگرا) از معادله‌ی ۱۰-۲۳ به دست می‌آید

$$a_r = \omega^{2} r = (7.85\ rad/s)^{2}(0.50\ m) \approx 31\ m/s^{2}$$

این شتاب بسیار بزرگ‌تر از شتاب $a_t$ است. در نتیجه بزرگی شتاب برابر است با

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲} \approx a_r = ۳۱\,\mathrm{m/s^۲}$$

**** ۲۷** صفحه‌ی یک گرامافون با تندی زاویه‌ای $۳۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد. یک تخم هندوانه به فاصله‌ی $۶/۰\,\mathrm{cm}$ از محور دوران بر روی صفحه قرار داده شده است. (الف) شتاب تخم را با این فرض که نمی‌لغزد، حساب کنید. (ب) اگر بخواهیم تخم نلغزد، کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تخم و صفحه چقدر باید باشد؟ (پ) فرض کنید صفحه با شتاب ثابت از حال سکون شروع به دوران می‌کند و پس از ۰/۲۵ ثانیه به این تندی زاویه‌ای می‌رسد. کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی لازم را برای آنکه تخم در مدت شتاب گرفتن نلغزد، حساب کنید.

**حل:** (الف) تندی زاویه‌ای برحسب $\mathrm{rad/s}$ برابر است با

$$\omega = \left(۳۳\frac{۱}{۳}\,\mathrm{rev/min}\right)\left(\frac{۲\pi\,\mathrm{rad/rev}}{۶۰\,\mathrm{s/min}}\right) = ۳/۴۹\,\mathrm{rad/s}$$

در نتیجه، شتاب شعاعی (مرکزگرا) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۳ برابر است با

$$a = \omega^۲ r = (۳/۴۹\,\mathrm{rad/s})^۲(۶/۰\times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{m}) = ۰/۷۳\,\mathrm{m/s^۲}$$

(ب) با استفاده از روش‌های فصل ۶ داریم $ma = f_s \le f_{s,\max} = \mu_s mg$، که برای به دست آوردن (کم‌ترین مقدار ممکن) ضریب اصطکاک به کار می‌رود

$$\mu_{s,\min} = \frac{a}{g} = \frac{۰/۷۳}{۹/۸} = ۰/۰۷۵$$

(پ) شتاب شعاعی تخم هندوانه $a_r = \omega^۲ r$ است، در حالی که شتاب مماسی آن $a_t = \alpha r$ است. در نتیجه داریم

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^۲ + a_t^۲} = \sqrt{(\omega^۲ r)^۲ + (\alpha r)^۲} = r\sqrt{\omega^۴ + \alpha^۲}$$

اگر بخواهیم تخم هندوانه هرگز نلغزد، باید داشته باشیم

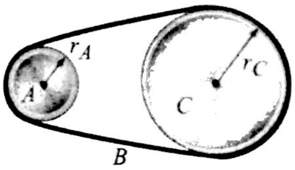
$$f_{s,\max} = \mu_s mg = ma_{\max} = mr\sqrt{\omega_{\max}^۴ + \alpha^۲}$$

بنابراین، چون $\alpha = \omega / t$ (معادله‌ی ۱۰-۱۲)، داریم

$$\mu_{s,\min} = \frac{r\sqrt{\omega_{\max}^۴ + \alpha^۲}}{g} = \frac{r\sqrt{\omega_{\max}^۴ + (\omega_{\max}/t)^۲}}{g}$$

$$= \frac{(۰/۰۶۰)\sqrt{۳/۴۹^۴ + (۳/۴/۰/۲۵)^۲}}{۹/۸} = ۰/۱۱$$

**** ۲۸** در شکل ۱۰-۳۱، چرخ $A$ به شعاع $r_A = ۱۰\,\mathrm{cm}$، به وسیله‌ی تسمه‌ی $B$ به چرخ $C$ به شعاع $r_C = ۲۵\,\mathrm{cm}$ وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ $A$ از حال سکون با آهنگ ثابت $۱/۶\,\mathrm{rad/s^۲}$ افزایش می‌یابد. با این فرض که تسمه نمی‌لغزد، مدت زمانی را که لازم است تا تندی زاویه‌ای چرخ $C$ به $۱۰۰\,\mathrm{rev/min}$ برسد، معین کنید. (***راهنمایی:*** اگر تسمه نلغزد، تندی خطی نقطه‌های واقع بر کناره‌های دو چرخ با هم مساوی‌اند.)




**شکل ۱۰-۳۱** مسئله‌ی ۲۸.

**حل:** چون تسمه نمی‌لغزد، شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی چرخ $C$ با شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی چرخ $A$ برابر است. یعنی: $\alpha_A r_A = \alpha_C r_C$، که $\alpha_A$ شتاب زاویه‌ای چرخ $A$ و $\alpha_C$ شتاب زاویه‌ای چرخ $C$ است. در نتیجه داریم:

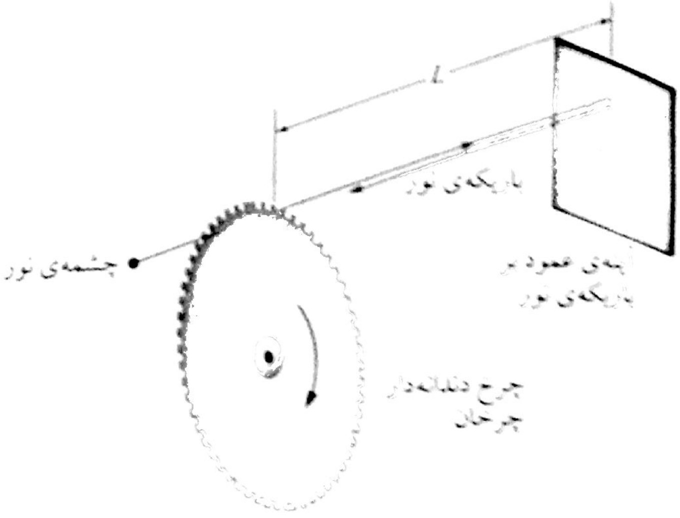
$$\alpha_C = \frac{r_A}{r_C}\alpha_C = \left(\frac{۱۰\,\mathrm{cm}}{۲۵\,\mathrm{cm}}\right)(۱/۶\,\mathrm{rad/s^۲}) = ۰/۶۴\,\mathrm{rad/s^۲}$$

تندی زاویه‌ای چرخ $C$ از رابطه‌ی $\omega_C = \alpha_C t$ به دست می‌آید. در نتیجه مدت زمان لازم برای آن که تندی زاویه‌ای چرخ $C$ از حال سکون به $۱۰۰\,\mathrm{rev/min} = ۱۰/۵\,\mathrm{rad/s}$ برسد، برابر است با

$$t = \frac{\omega_C}{\alpha_C} = \frac{۱۰/۵\,\mathrm{rad/s}}{۰/۶۴\,\mathrm{rad/s^۲}} = ۱۶/۴\,\mathrm{s}$$

**** ۲۹** در یکی از روش‌های اندازه‌گیری تندی نور از یک چرخ دندانه‌دار چرخان استفاده شده است. در این روش، باریکه‌ی نوری از شکاف میان دندانه‌های کناره‌ی بیرونی چرخ، مطابق **شکل ۱۰-۳۲**، می‌گذرد، به آینه‌ای که در فاصله‌ای دور قرار دارد **می‌تابد و** چنان به طرف چرخ برمی‌گردد که درست از شکاف **بعدی** چرخ عبور می‌کند. چرخ دندانه‌داری دارای شعاع $۵/۰\,\mathrm{cm}$ **است و** در کناره‌ی آن ۵۰۰ دندانه وجود دارد. اندازه‌گیری **مربوط** به وقتی که فاصله‌ی آینه از چرخ $L = ۵۰۰\,\mathrm{m}$ بوده

است، تندی نور را $3.0\times10^5\,km/s$ نشان می‌دهد. (الف) تندی زاویه‌ای (ثابت) چرخ دندانه‌دار چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟




**شکل ۱۰-۳۲** مسئله‌ی ۲۹.

**حل:** (الف) در مدت زمانی که طول می‌کشد تا نور به آینه بتابد و برگردد، چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta = 2\pi/500 = 1.26\times10^{-2}\,rad$ می‌چرخد. این مدت زمان برابر است با

$$t = \frac{2l}{c} = \frac{2(500\,m)}{2.998\times10^8\,m/s} = 3.34\times10^{-6}\,s$$

بنابراین سرعت زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{1.26\times10^{-2}\,rad}{3.34\times10^{-6}\,s} = 3.8\times10^3\,rad/s$$

(ب) اگر $r$ شعاع چرخ باشد، تندی خطی یک نقطه از لبه‌ی آن برابر است با

$$v = \omega r = (3.8\times10^3\,rad/s)(0.050\,m) = 1.9\times10^2\,m/s$$

**** ۳۰** چرخ لنگر ژیروسکوپی به شعاع $2.83\,cm$ با شتاب زاویه‌ای $14.2\,rad/s^2$ از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و تندی زاویه‌ای‌اش به $2760\,rev/min$ می‌رسد. (الف) شتاب مماسی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی ژیروسکوپ در طی فرایند شتاب گرفتن چقدر است؟ (ب) وقتی که ژیروسکوپ با تندی نهایی می‌چرخد، شتاب شعاعی این نقطه چقدر است؟ (پ) در مدت شتاب گرفتن چرخ، نقطه‌ی واقع بر کناره چه مسافتی می‌پیماید؟

**حل:** (الف) شتاب مماسی از معادله‌ی ۱۰-۲۲ به دست می‌آید

$$a_t = \alpha r = (14.2\,rad/s^2)(2.83\,cm) = 40\,cm/s^2$$

(ب) سرعت زاویه‌ای $\omega = (2760)(2\pi/60) = 289\,rad/s$ است، در نتیجه داریم

$$a_r = \omega^2 r = (289\,rad/s)^2(0.0283\,m) = 2.36\times10^3\,m/s^2$$

(پ) جابه‌جایی زاویه‌ای از معادله‌ی ۱۰-۱۴ به دست می‌آید

$$\theta = \frac{\omega^2}{2\alpha} = \frac{(289\,rad/s)^2}{2(14.2\,rad/s^2)} = 2.94\times10^3\,rad$$

در نتیجه مسافت پیموده شده با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱ برابر است با

$$s = r\theta = (0.0283\,m)(2.94\times10^3\,rad) = 83.2\,m$$

**** ۳۱** می‌خواهیم قرصی به شعاع $0.25\,m$ مانند یک چرخ و فلک از حال سکون شروع به چرخش کند و زاویه‌ی $800\,rad$ را بپیماید. این قرص درچرخش $400\,rad$ اول تندی زاویه‌ای‌اش را با شتاب ثابت $\alpha_1$ افزایش می‌دهد و سپس تندی زاویه‌ای‌اش را با شتاب ثابت $-\alpha_1$ کاهش می‌دهد تا دوباره متوقف شود. بزرگی شتاب مرکزگرای هر بخش از این قرص نباید از $400\,m/s^2$ تجاوز کند. (الف) کمترین زمان مورد نیاز برای این چرخش چقدراست؟ (ب) مقدار $\alpha_1$ متناظر با این زمان چیست؟

**حل:** (الف) حد بالاتر برای شتاب مرکزگرا (همچنین برای شتاب شعاعی ـ معادله‌ی ۱۰-۲۳ را ببینید) متناظر با حد بالاتر برای چرخش (سرعت زاویه‌ای $\omega$) برای یک نقطه‌ی واقع بر لبه‌ی قرص $(r = 0.25\,m)$ است. بنابراین، $\omega_{max} = \sqrt{a/r} = 40\,rad/s$. اکنون، از معادله‌ی ۱۰-۱۵ برای نیمه‌ی اول حرکت (که در آن $\omega_0 = 0$ است) استفاده می‌کنیم:

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \Rightarrow 400\,rad = \frac{1}{2}(0 + 40\,rad/s)t$$

در نتیجه $t = 20\,s$ به دست می‌آید. نیمه‌ی دوم حرکت نیز در مدت زمان مساوی صورت می‌گیرد (این فرایند، معکوس حالت اول است)؛ بنابراین مدت زمان کل مورد نیاز برای چرخش $40\,s$ است.

(ب) باز هم نیمه‌ی اول حرکت را در نظر می‌گیریم و از معادله‌ی ۱۰-۱۱ داریم

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{40\,rad/s}{20\,s} = 2.0\,rad/s^2$$

**** ۳۲** خودرویی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و یک مسیر دایره‌ای به شعاع $30.0\,m$ را دور می‌زند. تندی این

خودرو با آهنگ ثابت $۰/۶۰۰\,m/s^۲$ افزایش می‌یابد. (الف) بزرگی شتاب خطی **برایند** خودرو پس از $۱۵/۰\,s$ چقدر است؟ (ب) زاویه‌ی این بردار شتاب برایند با بردار سرعت خودرو در این لحظه چیست؟

**حل:** (الف) تندی خطی در لحظه‌ی $t = ۱۵/۰\,s$ برابر است با

$$v = a_t t = (۰/۶۰۰\,m/s^۲)(۱۵/۰\,s) = ۹/۰۰\,m/s$$

شتاب شعاعی (مرکزگرا) در آن لحظه برابر است با

$$a_r = \frac{v^۲}{r} = \frac{(۹/۰۰\,m/s)^۲}{۳۰/۰\,m} = ۲/۷\,m/s^۲$$

پس، بزرگی شتاب برایند برابر است با

$$a = \sqrt{a_t^۲ + a_r^۲} = \sqrt{(۰/۶۰۰\,m/s^۲)^۲ + (۲/۷\,m/s^۲)^۲}$$

$$= ۲/۷۷\,m/s^۲$$

(ب) می‌دانیم که $\vec{v} \parallel \vec{a_t}$. درنتیجه زاویه‌ی بین $\vec{v}$ و $\vec{a}$ برابر است با

$$\tan^{-1}\left(\frac{a_r}{a_t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{۲/۷}{۰/۶۰۰}\right) = ۷۶/۷^\circ$$

بنابراین جهت بردار بیشتر به طرف مرکز مسیر متمایل است تا جهت حرکت خودرو.

## پودمان ۱۰-۴ انرژی جنبشی دورانی

* **۳۳** لَختی دورانی چرخی را حساب کنید که انرژی جنبشی‌اش در موقع دوران با تندی $۶۰۲\,rev/min$، برابر با $۲۴۴۰۰\,J$ باشد.

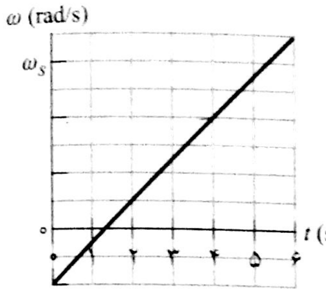
**حل:** انرژی جنبشی چرخ (برحسب ژول) از رابطه‌ی $K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲$ به دست می‌آید که در آن $I$ لختی دورانی (برحسب $kg.m^۲$) و $\omega$ سرعت زاویه‌ای (برحسب $rad/s$) است. پس، سرعت زاویه‌ای چرخ برابر است با

$$\omega = \frac{(۶۰۲\,rev/min)(۲\pi\,rad/rev)}{۶۰\,s/min} = ۶۳/۰\,rad/s$$

در نتیجه لختی دورانی چرخ برابر است با

$$I = \frac{۲K}{\omega^۲} = \frac{۲(۲۴۴۰۰\,J)}{(۶۳/۰\,rad/s)^۲} = ۱۲/۳\,kg.m^۲$$

* **۳۴ شکل ۱۰-۳۳ نمودار تندی زاویه‌ای مربوط به‌میله‌ی باریکی را برحسب زمان نشان می‌دهد، که به دور یک سر میله دوران** می‌کند. مقیاس محور قائم شکل $\omega$، با مقدار $\omega_s = ۶/۰\,rad/s$ مشخص شده است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ (ب) در زمان $t = ۴/۰\,s$ انرژی جنبشی دورانی میله $۱/۶۰\,J$ است. انرژی جنبشی میله در زمان $t = ۰$ چیست؟




**شکل ۱۰-۳۳** مسئله‌ی ۳۴.

**حل:** (الف) معادله‌ی ۱۰-۱۲ نشان می‌دهد که شتاب زاویه‌ای $\alpha$ باید با شیب منحنی $\omega$ برحسب $t$ برابر باشد. در نتیجه داریم: $\alpha = ۹/۶ = ۱/۵\,rad/s^۲$.

(ب) با توجه به معادله‌ی ۱۰-۳۴، $K$ با $\omega^۲$ متناسب است. چون سرعت زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = ۰$ مساوی با $-۲\,rad/s$ (و مربع این مقدار مساوی با ۴) است و سرعت زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = ۴s$ مساوی با $۴\,rad/s$ (و مربع این مقدار مساوی با ۱۶) است، در نتیجه نسبت انرژی‌های جنبشی متناظر برابر است با

$$\frac{K_۰}{K_۴} = \frac{۴}{۱۶} \Rightarrow K_۰ = K_۴/۴ = ۰/۴۰\,J$$

## پودمان ۱۰-۵ محاسبه‌ی لَختی دورانی

* **۳۵** دو استوانه‌ی صُلب یکنواخت به دور محور مرکزی (طولی) خود می‌چرخند. استوانه‌ها دارای جرم یکسان $۱/۲۵\,kg$ هستند و با تندی زاویه‌ای یکسان $۲۳۵\,rad/s$، اما با شعاع‌های متفاوت، می‌چرخند. انرژی جنبشی دورانی، (الف) استوانه‌ی کوچک‌تر به شعاع $۰/۲۵\,m$، و (ب) استوانه‌ی بزرگ‌تر به شعاع $۰/۷۵\,m$، چقدر است؟

**حل:** چون لختی دورانی استوانه $I = \frac{۱}{۲}MR^۲$ (جدول ۱۰-۲ پ) است، انرژی جنبشی دورانی آن برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۴}MR^۲\omega^۲$$

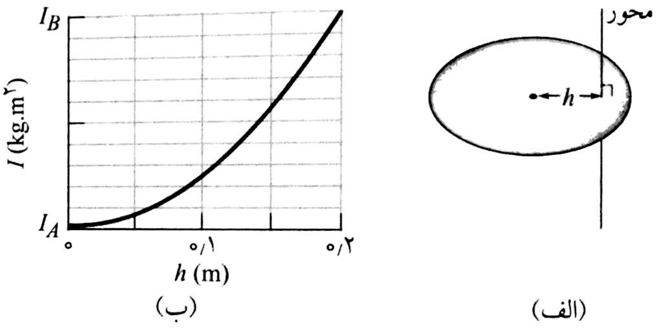
(الف) برای استوانه‌ی کوچک‌تر داریم

$$K_۱ = \frac{۱}{۴}(۱/۲۵\,\mathrm{kg})(۰/۲۵\,\mathrm{m})^۲(۲۳۵\,\mathrm{rad/s})^۲$$
$$= ۱/۰۸ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J} \approx ۱/۱ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$$

(ب) برای استوانه‌ی بزرگ‌تر داریم

$$K_۲ = \frac{۱}{۴}(۱/۲۵\,\mathrm{kg})(۰/۷۵\,\mathrm{m})^۲(۲۳۵\,\mathrm{rad/s})^۲$$
$$= ۹/۷۱ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J} \approx ۹/۷ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$$

*** ۳۶** شکل ۱۰-۳۴ الف قرصی را نشان می‌دهد که می‌تواند به دور یک محور واقع در فاصله‌ی شعاعی $h$ از مرکز قرص بچرخد. شکل ۱۰-۳۴ ب نمودار لختی دورانی قرص $I$، نسبت به این محور را به صورت تابعی از $h$، از مرکز تا لبه‌ی قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل $I$، با مقادیر $I_A = ۰/۰۵۰\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$ و $I_B = ۰/۱۵۰\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$ مشخص شده‌اند. جرم قرص چقدر است؟




**شکل ۱۰-۳۴** مسئله‌ی ۳۶.

**حل:** قضیه‌ی محور موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) نشان می‌دهد که $I$ با $h$ افزایش پیدا می‌کند. عبارت «تا لبه‌ی قرص» در صورت مسئله تأکید می‌کند که $h$ بیشینه در نمودار، همان شعاع $R$ قرص است. بنابراین $R = ۰/۲۰\,\mathrm{m}$ است. اکنون می‌توانیم مثلاً $h = ۰$ را امتحان کنیم و از فرمول $I$ (جدول ۱۰-۲ پ) برای یک قرص صلب استفاده کنیم و به ازای $h = ۰$ و $h = h_{max} = R$ مقدار $I$ را به‌دست آوریم و اختلاف آن‌ها را پیدا کنیم [که این اختلاف مساوی با $M(h_{max})^۲ = ۰/۱۰\,\mathrm{kg.m^۲}$ خواهد بود]. در هر دو حالت مقدار $M = ۲/۵\,\mathrm{kg}$ به دست می‌آید.

*** ۳۷** لختی دورانی یک خط‌کش چوبی یک متری به جرم $۰/۵۶\,\mathrm{kg}$ را نسبت به محور عمود بر خط‌کش و واقع در روی علامت $۲۰\,\mathrm{cm}$ حساب کنید. (خط‌کش را به صورت تخته‌ای باریک در نظر بگیرید).

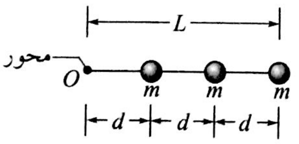
**حل:** از قضیه‌ی محور موازی استفاده می‌کنیم: $I = I_{com} + Mh^۲$، که در آن $I_{com}$ لختی دورانی حول مرکز جرم (جدول ۱۰-۲ ت را ببینید)، $M$ جرم، و $h$ فاصله‌ی محور دوران تا مرکز جرم است. مرکز جرم در مرکز قرص واقع است، در نتیجه داریم $h = ۰/۵۰\,\mathrm{m} - ۰/۲۰\,\mathrm{m} = ۰/۳۰\,\mathrm{m}$. لختی دورانی خط‌کش حول مرکز جرم آن برابر است با

$$I_{com} = \frac{۱}{۱۲}ML^۲ = \frac{۱}{۱۲}(۰/۵۶\,\mathrm{kg})(۱/۰\,\mathrm{m})^۲$$
$$= ۴/۶۷ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{kg.m^۲}$$

در نتیجه از قضیه‌ی محور موازی داریم

$$I = ۴/۶۷ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{kg.m^۲} + (۰/۵۶\,\mathrm{kg})(۰/۳۰\,\mathrm{m})^۲$$
$$= ۹/۷ \times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{kg.m^۲}$$

*** ۳۸** شکل ۱۰-۳۵ سه ذره، هر یک به جرم $۰/۰۱۰۰\,\mathrm{kg}$، را نشان می‌دهد، که به میله‌ای به طول $L = ۸/۰۰\,\mathrm{cm}$ و به جرم ناچیز، چسبیده‌اند. این مجموعه می‌تواند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی $O$ واقع در انتهای چپ میله دوران کند. اگر یک ذره (که ۳۳ درصد جرم را تشکیل می‌دهد) حذف شود، لختی دورانی مجموعه نسبت به محور دوران در حالت‌های زیر چند درصد کاهش می‌یابد: (الف) نزدیک‌ترین ذره، و (ب) دورترین ذره، به محور دوران؟




**شکل ۱۰-۳۵** مسئله‌های ۳۸ و ۶۲.

**حل:** (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I_{کل} = md^۲ + m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲ = ۱۴md^۲$$

اگر نزدیک‌ترین ذره به محور دوران حذف شود، خواهیم داشت: $m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲ = ۱۳md^۲$. درصد کاهش لختی دورانی برابر است با $(۱۳ - ۱۴)/۱۴ = ۰/۰۷۱۴ \approx ۷/۱\%$.

(ب) حال اگر دورترین ذره تا محور دوران حذف شود، خواهیم

داشت $md^2 + m(2d)^2 = 5md^2$. در این حالت، درصد کاهش لختی دورانی برابر است با $64\% \approx 0{,}643$.

**۳۹ ٭٭** کامیون‌ها را با انرژی ذخیره شده در یک چرخ لنگر، که توسط یک موتور الکتریکی به چرخش در می‌آید و به بالاترین تندی زاویه‌ای $200\pi\ \text{rad/s}$ می‌رسد، می‌توان به حرکت در آورد. چنین چرخ لنگری یک استوانه‌ی یکنواخت توپر به جرم $500\,\text{kg}$ و شعاع $1{,}0\,\text{m}$ است. (الف) انرژی جنبشی چرخ لنگر پس از انرژی‌گذاری، چقدر است؟ (ب) اگر توان متوسط مصرفی کامیون $8{,}0\,\text{kW}$ باشد، در بین دومرحله‌ی انرژی‌گذاری کامیون چند دقیقه می‌تواند کار کند؟

**حل:** (الف) با توجه به جدول ۱۰-۲ پ و معادله‌ی ۱۰-۳۴، انرژی جنبشی دورانی برابر است با

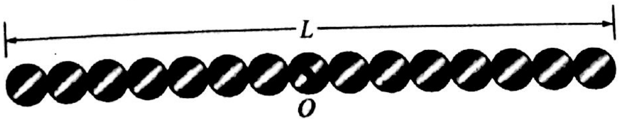
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2$$

$$= \frac{1}{4}(500\,\text{kg})(200\pi\ \text{rad/s})^2(1{,}0\,\text{m})^2 = 4{,}9\times10^7\ \text{J}$$

(ب) مدت زمان کار کامیون را از رابطه‌ی $P = K(t)$ ($P$ توان متوسط است) به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{K}{P} = \frac{4{,}9\times10^7\ \text{J}}{8{,}0\times10^3\ \text{W}} = 6{,}2\times10^3\ \text{s} \approx 1{,}0\times10^2\ \text{min}$$

**۴۰ ٭٭** شکل ۱۰-۳۶ آرایشی از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به گونه‌ای میله مانند به طول $L = 1{,}0000\,\text{m}$ و جرم (کل) $M = 100{,}0\,\text{mg}$ به یکدیگر چسبانده شده‌اند. این آرایش قرص‌ها می‌تواند به دور محور گذرنده از قرص مرکزی در نقطه‌ی $O$ دوران کند. (الف) لختی دورانی این آرایش نسبت به محور چقدر است؟ (ب) اگر این آرایش را به طور تقریبی مانند میله‌ای یکنواخت به جرم $M$ و طول $L$ در نظر بگیریم، در هنگام استفاده کردن از فرمول جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبه‌ی لختی دورانی، چند درصد مرتکب خطا می‌شویم؟




**شکل ۱۰-۳۶ مسئله‌ی ۴۰.**

**حل:** **(الف) سه تا از قرص‌ها را (که از نقطه‌ی $O$ شروع می‌شوند) در نظر می‌گیریم: ⊕○○. قرص اول (واقع در نقطه‌ی $O$) دارای**

لختی دورانی $I = \frac{1}{2}mR^2$ است (به جدول ۱۰-۲ پ رجوع کنید). لختی دورانی قرص بعدی (با استفاده از قضیه‌ی محور موازی) برابر است با

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mh^2$$

در اینجا $h = 2R$ است. لختی دورانی قرص سوم $I = \frac{1}{2}mR^2 + m(4R)^2$ است. اگر پنج قرص ○○⊕○○ را در نظر بگیریم که قرص وسطی در نقطه‌ی $O$ قرار دارد، لختی دورانی کل برابر می‌شود با

$$I = 5\left(\frac{1}{2}mR^2\right) + 2\left(m(2R)^2 + m(4R)^2\right)$$

اکنون با توجه به تشابه، می‌توانیم لختی دورانی پانزده قرص را پیدا کنیم:

$$I = 15\left(\frac{1}{2}mR^2\right) + 2\left(m(2R)^2 + m(4R)^2 + m(6R)^2 + \cdots + m(14R)^2\right) = \frac{2255}{2}mR^2$$

بنابراین لختی دورانی $N$ قرص ($N$ را عدد فرد در نظر می‌گیریم) برابر است با

$$I = \frac{1}{6}(2N^2 + 1)NmR^2$$

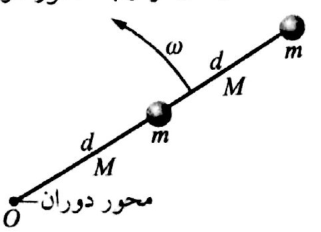
که برحسب جرم کل ($m = M/15$) و طول کل ($R = L/30$) داریم

$$I = 0{,}083519ML^2 \approx (0{,}08352)(0{,}1000\,\text{kg})(1{,}0000\,\text{m})^2$$

$$= 8{,}352\times10^{-3}\ \text{kg.m}^2$$

(ب) اگر این مقدار را با مقدار به دست آمده از فرمول (ث) در جدول ۱۰-۲ (که از آن $I = 0{,}08333\,ML^2$ به دست می‌آید) مقایسه کنیم، متوجه می‌شویم که پاسخ به دست آمده برای قسمت (الف) به اندازه‌ی $0{,}22\%$ کمتر است.

**۴۱ ٭٭** در شکل ۱۰-۳۷، دو گلوله هریک به جرم $m = 0{,}85\,\text{kg}$، به وسیله‌ی دو میله‌ی باریک، هر یک به طول $d = 5{,}6\,\text{cm}$ و جرم $M = 1{,}2\,\text{kg}$، به یکدیگر و به محور دوران واقع در نقطه‌ی




**شکل ۱۰-۳۷ مسئله‌ی ۴۱.**

O، وصل شده‌اند. این ترکیب با تندی زاویه‌ای $\omega = ۰٫۳۰\,\mathrm{rad/s}$ به دور محور می‌چرخد. (الف) لختی دورانی و (ب) انرژی جنبشی این ترکیب نسبت به نقطه‌ی $O$ چیست؟

**حل:** گلوله‌ها را به صورت «نقطه» در نظر می‌گیریم تا بتوانیم لختی دورانی آن‌ها را از معادله‌ی ۱۰-۳۳، و لختی دورانی میله‌ها را از جدول ۱۰-۲ ث و قضیه‌ی محور موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) به‌دست آوریم.

(الف) نزدیک‌ترین میله به محور را با پانویس ۱ و دورترین گلوله را با پانویس ۴ مشخص می‌کنیم، در نتیجه داریم

$$I = I_۱ + I_۲ + I_۳ + I_۴ = \left(\frac{۱}{۱۲}Md^۲ + M\left(\frac{۱}{۲}d\right)^۲\right) + md^۲$$

$$+\left(\frac{۱}{۱۲}Md^۲ + M\left(\frac{۳}{۲}d\right)^۲\right) + m(۲d)^۲ = \frac{۸}{۳}Md^۲ + ۵md^۲$$

$$= \frac{۸}{۳}(۱٫۲\,\mathrm{kg})(۰٫۰۵۶\,\mathrm{m})^۲ + ۵(۰٫۸۵\,\mathrm{kg})(۰٫۰۵۶\,\mathrm{m})^۲$$

$$= ۰٫۰۲۳\,\mathrm{kg.m^۲}$$

(ب) با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ داریم

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \left(\frac{۴}{۳}M + \frac{۵}{۲}m\right)d^۲\omega^۲$$

$$= \left[\frac{۴}{۳}(۱٫۲\,\mathrm{kg}) + \frac{۵}{۲}(۰٫۸۵\,\mathrm{kg})\right](۰٫۰۵۶\,\mathrm{m})^۲(۰٫۳۰\,\mathrm{rad/s})^۲$$

$$= ۱٫۱\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{J}$$

** ۴۲ جرم‌ها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از: ۵۰g، $x = ۲٫۰\,\mathrm{cm}$، $y = ۲٫۰\,\mathrm{cm}$؛ ۲۵g، $x = ۰$، $y = ۴٫۰\,\mathrm{cm}$؛ ۲۵g، $x = -۳٫۰\,\mathrm{cm}$، $y = -۳٫۰\,\mathrm{cm}$؛ ۳۰g، $x = -۲٫۰\,\mathrm{cm}$، $y = ۴٫۰\,\mathrm{cm}$. لختی دورانی این مجموعه نسبت به محورهای (الف) $x$، (ب) $y$، و (پ) $z$، چیست؟ (ت) فرض کنید پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب)، به ترتیب، $A$ و $B$ است. در این صورت، پاسخ قسمت (پ) برحسب $A$ و $B$ چیست؟

**حل:** (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ استفاده می‌کنیم:

$$I_x = \sum_{i=۱}^{۴} m_i y_i^۲$$

$$= [۵۰(۲٫۰)^۲ + (۲۵)(۴٫۰)^۲ + ۲۵(-۳٫۰)^۲ + ۳۰(۴٫۰)^۲]\,\mathrm{g.cm^۲}$$

$$= ۱٫۳\times ۱۰^۳\,\mathrm{g.cm^۲}$$

(ب) برای دوران حول محور $y$ داریم

$$I_y = \sum_{i=۱}^{۴} m_i x_i^۲$$

$$= ۵۰(۲٫۰)^۲ + (۲۵)(۰)^۲ + ۲۵(۳٫۰)^۲ + ۳۰(۲٫۰)^۲$$

$$= ۵٫۵\times ۱۰^۲\,\mathrm{g.cm^۲}$$

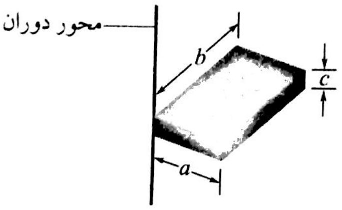
(پ) برای دوران حول محور $z$ (با توجه به این که فاصله تا محور $z$ برابر است با $\sqrt{x^۲ + y^۲}$) داریم

$$I_z = \sum_{i=۱}^{۴} m_i (x_i^۲ + y_i^۲) = I_x + I_y$$

$$= ۱٫۳\times ۱۰^۳ + ۵٫۵\times ۱۰^۲ = ۱٫۹\times ۱۰^۲\,\mathrm{g.cm^۲}$$

(ت) واضح است که پاسخ قسمت (پ) برابر است با $A + B$.

** ۴۳ جسم صُلب با توزیع جرم یکنواخت شکل ۱۰-۳۸، دارای جرم ۰٫۱۷۲kg و ضلع‌های $a = ۳٫۵\,\mathrm{cm}$، $b = ۸٫۴\,\mathrm{cm}$ و $c = ۱٫۴\,\mathrm{cm}$ است. لختی دورانی این جسم را نسبت به محور گذرنده از یکی از گوشه‌ها و عمود بر وجه‌های بزرگ، حساب کنید.




**شکل ۱۰-۳۸** مسئله‌ی ۴۳.

**حل:** چون محور دوران از مرکز جسم عبور نمی‌کند، از قضیه‌ی محور موازی برای حساب کردن لختی دورانی استفاده می‌کنیم. بر طبق جدول ۱۰-۲ خ، لختی دورانی برای یکنواخت حول محور گذرنده از مرکز آن و عمود بر وجه بزرگ آن برابر است با $I_{com} = \frac{M}{۱۲}(a^۲ + b^۲)$. فاصله‌ی محور موازی گذرنده از گوشه‌ی جسم تا مرکز جسم $h = \sqrt{(a/۲)^۲ + (b/۲)^۲}$ است. در نتیجه داریم

$$I = I_{com} + Mh^۲ = \frac{M}{۱۲}(a^۲ + b^۲) + \frac{M}{۴}(a^۲ + b^۲)$$

$$= \frac{M}{۳}(a^۲ + b^۲)$$

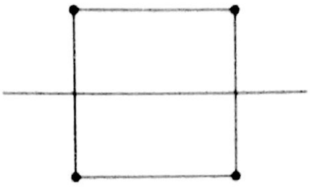
به ازای $M = ۰٫۱۷۲\,\mathrm{kg}$، $a = ۳٫۵\,\mathrm{cm}$، و $b = ۸٫۴\,\mathrm{cm}$، داریم

$$I = \frac{M}{۳}(a^۲ + b^۲) = \frac{۰٫۱۷۲\,\mathrm{kg}}{۳}[(۰٫۰۳۵\,\mathrm{m})^۲ + (۰٫۰۸۴\,\mathrm{m})^۲]$$

$$= ۴٫۷\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg.m^۲}$$

** ۴۴ چهار ذره‌ی مشابه، هریک به‌جرم $۰٫۵۰\,kg$، در رأس‌های یک مربع $۲٫۰m \times ۲٫۰m$ قرار دارند و به وسیله‌ی چهار میله‌ی بی‌جرم که ضلع‌های مربع را تشکیل می‌دهند، به هم وصل شده‌اند. لختی دورانی این جسم صُلب را نسبت به‌محور گذرنده، (الف) از وسط ضلع‌های متقابل و واقع در صفحه‌ی مربع، (ب) از وسط یکی از ضلع‌ها و عمود برصفحه‌ی مربع، و (پ) از قطر وصل کننده‌ی دو ذره و واقع در صفحه‌ی مربع، حساب کنید.

**حل:** (الف) شکل مقابل چهار ذره و محور دوران (خط افقی باریک) را نشان می‌دهد.



فاصله‌ی هر یک از ذره‌ها تا محور دوران $r = ۱٫۰\,m$ است. بنابراین با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۶ داریم

$$I = \sum m_i r_i^2 = ۴(۰٫۵۰kg)(۱٫۰m)^2 = ۲٫۰\,kg.m^2$$

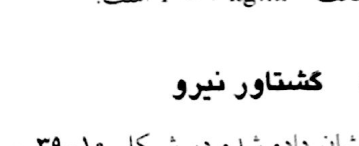
(ب) در این حالت، دو ذره به محور دوران نزدیک‌اند و فاصله‌ی آن‌ها تا محور $r = ۱٫۰\,m$ است، اما دو ذره‌ی دیگر دورتر از محور و به فاصله‌ی $r = \sqrt{(۱٫۰m)^2 + (۲٫۰m)^2}$ از آن قرار دارند. بنابراین از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I = \sum m_i r_i^2 = ۲(۰٫۵۰kg)(۱٫۰m)^2 + ۲(۰٫۵۰kg)(\sqrt{۵}m)^2$$
$$= ۶٫۰\,kg.m^2$$

(پ) در این حالت، دو ذره در روی محور دوران $(r = ۰)$ قرار دارند و فاصله‌ی دوذره‌ی دیگر از آن محور $r=\sqrt{(۱٫۰m)^2+(۱٫۰m)^2}$ است. در این حالت $I = ۳\,kg.m^2$ است.

## پودمان ۱۰-۶ گشتاور نیرو

* ۴۵ جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۹، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه $O$ بچرخد و دو نیرو، مطابق شکل، به آن وارد می‌شوند. به ازای $r_1 = ۱٫۳۰m$، $r_2 = ۲٫۱۵\,m$، $F_1 = ۴٫۲۰\,N$، $F_2 = ۴٫۹۰\,N$، $\theta_1 = ۷۵٫۰^\circ$ و $\theta_2 = ۶۰٫۰^\circ$، گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی $O$ چیست؟




**شکل ۱۰-۳۹** مسئله‌ی ۴۵.

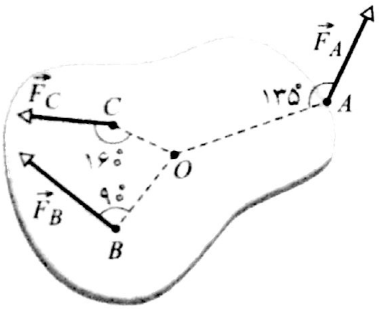
**حل:** گشتاور نیرویی را که می‌خواهد جسم را از حال سکون در جهت پادساعتگرد بچرخاند، مثبت و گشتاور در جهت ساعتگرد را منفی در نظر می‌گیریم. در نتیجه، بزرگی گشتاور مثبت ناشی از نیروی $\vec{F}_1$ به صورت $r_1F_1 \sin\theta_1$، و بزرگی گشتاور منفی ناشی از نیروی $\vec{F}_2$ به صورت $r_2F_2 \sin\theta_2$ است. گشتاور نیروی برایند برابر است با

$$\tau = r_1F_1 \sin\theta_1 - r_2F_2 \sin\theta_2$$

اگر مقادیر معلوم را در این رابطه قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\tau = (۱٫۳۰m)(۴٫۲۰N)\sin ۷۵^\circ - (۲٫۱۵m)(۴٫۹۰N)\sin ۶۰^\circ$$
$$= -۳٫۸۵\,N.m$$

* ۴۶ جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۰، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه $O$ بچرخد. این جسم، مطابق شکل، تحت اثر سه نیرو قرار می‌گیرد: $F_A = ۱۰N$ در نقطه‌ی $A$، به فاصله‌ی $۸٫۰m$ از نقطه‌ی $O$؛ $F_B = ۱۶N$ در نقطه‌ی $B$، به‌فاصله‌ی $۴٫۰m$ از نقطه‌ی $O$؛ $F_C = ۱۹N$ در نقطه‌ی $C$، به‌فاصله‌ی $۳٫۰m$ از نقطه‌ی $O$. گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی $O$ چیست؟



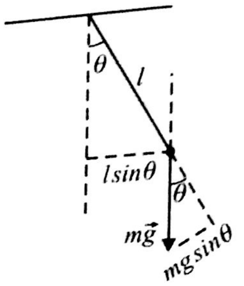

**شکل ۱۰-۴۰** مسئله‌ی ۴۶.

**حل:** گشتاور نیروی برایند برابر است با

$$\tau = \tau_A + \tau_B + \tau_C$$
$$= F_A r_A \sin\phi_A - F_B r_B \sin\phi_B + F_C r_C \sin\phi_C$$
$$= (۱۰)(۸٫۰)\sin ۱۳۵^\circ - (۱۶)(۴٫۰)\sin ۹۰^\circ + (۱۹)(۳٫۰)\sin ۱۶۰^\circ$$
$$= ۱۲\,N.m$$

* ۴۷ گلوله‌ی کوچکی به جرم $۰٫۷۵\,kg$ به یک سر میله‌ی بی‌جرمی به طول $۱٫۲۵\,m$ وصل شده و سر دیگر میله به یک نقطه‌ی چرخشگاه آویخته شده است. وقتی که آونگ حاصل به

اندازه‌ی ۳۰ درجه نسبت به وضعیت قائم منحرف می‌شود، بزرگی گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه چقدر است؟




**حل:** دو نیرو به گلوله وارد می‌شود: نیروی میله و نیروی گرانش. نیروی ناشی از میله هیچ گشتاوری را حول نقطه چرخشگاه وارد نمی‌کند، زیرا این نیرو در راستای خط واصل گلوله و نقطه چرخشگاه اثر می‌کند.

همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، مؤلفه‌ی نیروی گرانش عمود بر میله، $mg\sin\theta$ است. اگر $l$ طول میله باشد، بزرگی گشتاور ناشی از این نیرو برابر است با

$$\tau = mg\, l\sin\theta = (۰/۷۵)(۹/۸)(۱/۲۵)\sin ۳۰^\circ = ۴/۶\,\text{N.m}$$

برای وضعیت نشان داده شده، جهت گشتاور نیرو در جهت پادساعتگرد است.

* **۴۸** طول بازوی رکاب دوچرخه‌ای $۰/۱۵۲\,\text{m}$ است و یک نیروی رو به پایین ۱۱۱ نیوتونی از پای دوچرخه‌سوار به رکاب وارد می‌شود. بزرگی گشتاور این نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه بازوی رکاب وقتی که این بازو با امتداد قائم زاویه‌ی، (الف) ۳۰ درجه، (ب) ۹۰ درجه و (پ) ۱۸۰، درجه می‌سازد، چقدر است؟

**حل:** گشتاورهای نیرو را با استفاده از رابطه‌ی $\tau = rF\sin\phi$ حساب می‌کنیم.

(الف) برای زاویه‌ی $\phi = ۳۰^\circ$ داریم:

$$\tau_a = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۳۰^\circ = ۸/۴\,\text{N.m}$$

(ب) برای زاویه‌ی $\phi = ۹۰^\circ$ داریم:

$$\tau_b = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۹۰^\circ = ۱۷\,\text{N.m}$$

(پ) برای زاویه‌ی $\phi = ۱۸۰^\circ$ داریم:

$$\tau_c = (۰/۱۵۲\,\text{m})(۱۱۱\,\text{N})\sin ۱۸۰^\circ = ۰$$

## پودمان ۱۰-۷ قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی

* **۴۹** شیرجه‌رویی در حین شیرجه رفتن از تخته تندی زاویه‌ای‌اش به دور مرکز جرمش در مدت $۲۲۰\,\text{ms}$ از صفر تا $۶/۲۰\,\text{rad/s}$ افزایش می‌یابد. لختی دورانی شیرجه‌رو نسبت به مرکز جرمش $۱۲/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ است. در حین پرش، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو و (ب) گشتاور نیروی خارجی متوسط وارد به او از سوی تخته‌ی شیرجه، چقدر است؟

**حل:** (الف) از معادله‌ی $\omega = \omega_۰ + \alpha t$ استفاده می‌کنیم که در آن $\omega_۰$ سرعت زاویه‌ای آغازی، $\omega$ سرعت زاویه‌ای پایانی، $\alpha$ شتاب زاویه‌ای و $t$ مدت زمان پرش است. پس، شتاب زاویه‌ای متوسط شیرجه رو برابر است با

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_۰}{t} = \frac{۶/۲۰\,\text{rad/s}}{۲۲۰\times۱۰^{-۳}\,\text{s}} = ۲۸/۲\,\text{rad/s}^۲$$

(ب) اگر $I$ لختی دورانی شیرجه رو باشد، بزرگی گشتاور نیروی وارد بر او برابر است با

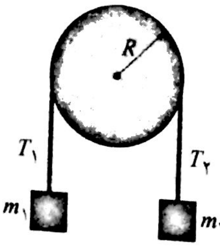
$$\tau = I\alpha = (۱۲/۰\,\text{kg.m}^۲)(۲۸/۲\,\text{rad/s}^۲) = ۳/۳۸\times۱۰^۲\,\text{N.m}$$

* **۵۰** اگر یک چرخ با وارد شدن گشتاور نیروی $۳۲/۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ به آن شتاب زاویه‌ای $۲۵/۰\,\text{rad/s}^۲$ را پیدا کند، لختی دورانی چرخ چیست؟

**حل:** لختی دورانی از معادله‌ی ۱۰-۴۵ به دست می‌آید:

$$I = \frac{\tau}{\alpha} = \frac{۳۲/۰}{۲۵/۰} = ۱/۲۸\,\text{kg.m}^۲$$

** **۵۱** در شکل ۱۰-۴۱، قطعه‌ی ۱ دارای جرم $m_۱ = ۴۶۰\,\text{g}$ و قطعه‌ی ۲ دارای جرم $m_۲ = ۵۰۰\,\text{g}$ است و قرقره‌ی سوار شده روی یک محور افقی بی‌اصطکاک دارای شعاع $R = ۵/۰۰\,\text{cm}$ است. وقتی قطعه‌ی ۲ از حال سکون رها می‌شود در مدت $۵/۰۰\,\text{s}$ به اندازه‌ی $۷۵/۰\,\text{cm}$ سقوط می‌کند بی‌آنکه ریسمان بر روی قرقره بلغزد. (الف) بزرگی شتاب قطعه‌ها چقدر است؟ (ب) نیروی کشش $T_۲$ و (پ) نیروی کشش $T_۱$ چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چیست؟ (ث) لختی دورانی قرقره چقدر است؟




**شکل ۱۰-۴۱** مسئله‌های ۵۱ و ۸۳

**حل:** (الف) از سینماتیک شتاب ثابت استفاده می‌کنیم. اگر جهت رو به پایین را مثبت درنظر بگیریم و $a$ شتاب قطعه‌ی سنگین‌تر $m_۲$ باشد، در آن صورت مختصه‌ی آن از رابطه‌ی $y = \frac{۱}{۲}at^{۲}$ به دست می‌آید:

$$a = \frac{۲y}{t^{۲}} = \frac{۲(۰/۷۵۰\,\text{m})}{(۵/۰۰\,\text{s})^{۲}} = ۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m/s}^{۲}$$

شتاب قطعه‌ی ۱، $۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m/s}^{۲}$ به طرف بالا است.

(ب) قانون دوم نیوتون برای قطعه‌ی ۲ به صورت $m_۲g - T_۲ = m_۲a$ نوشته می‌شود، که در آن $m_۲$ جرم و $T_۲$ نیروی کشش است. در نتیجه داریم

$$T_۲ = m_۲(g-a)$$
$$= (۰/۵۰۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^{۲} - ۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m/s}^{۲}) = ۴/۸۷\,\text{N}$$

(پ) قانون دوم نیوتون برای قطعه‌ی ۱ به صورت $m_۱g - T_۱ = -m_۱a$ نوشته می‌شود، که در آن $T_۱$ نیروی کشش وارد بر قطعه‌ی ۱ و برابر است با

$$T_۱ = m_۱(g+a)$$
$$= (۰/۴۶۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^{۲} + ۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m/s}^{۲}) = ۴/۵۴\,\text{N}$$

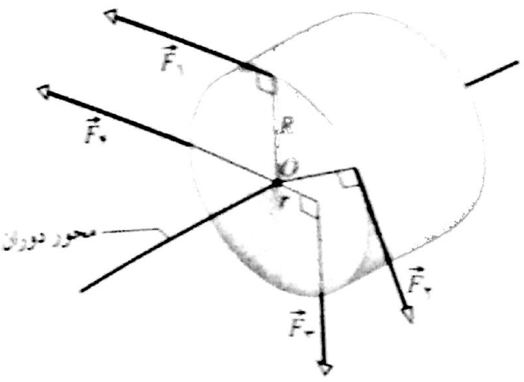
(ت) چون ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد، شتاب مماسی هر نقطه از لبه‌ی قرقره باید با شتاب قطعه‌ها مساوی باشد:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{۶/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m/s}^{۲}}{۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m}} = ۱/۲۰\,\text{rad/s}^{۲}$$

(ث) گشتاور نیروی برایند وارد بر قرقره، $\tau = (T_۲ - T_۱)R$ است. این مقدار را مساوی با $I\alpha$ قرار می‌دهیم و لختی دورانی را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{(T_۲ - T_۱)R}{\alpha} = \frac{(۴/۸۷\,\text{N} - ۴/۵۴\,\text{N})(۵/۰۰\times۱۰^{-۲}\,\text{m})}{۱/۲۰\,\text{rad/s}^{۲}}$$
$$= ۱/۳۸\times۱۰^{-۲}\,\text{kg.m}^{۲}$$

**** ۵۲** در شکل ۱۰-۴۲، استوانه‌ای به جرم ۲/۰kg می‌تواند به دور محور مرکزی خود که از نقطه‌ی $O$ می‌گذرد، بچرخد. نیروهای وارد شده مطابق شکل، عبارت‌اند از: $F_۱ = ۶/۰\,\text{N}$، $F_۲ = ۴/۰\,\text{N}$، $F_۳ = ۲/۰\,\text{N}$، و $F_۴ = ۵/۰\,\text{N}$. هم‌چنین، داریم $R = ۱۲\,\text{cm}$ و $r = ۵/۰\,\text{cm}$. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب زاویه‌ای استوانه (در حین دوران، نیروها زاویه‌ی خود را نسبت به استوانه حفظ می‌کنند).**




**شکل ۱۰-۴۲** مسئله‌ی ۵۲

**حل:** بنابر علامت قراردادی به کار رفته برای استوانه، بزرگی گشتاور نیروی برایند وارد شده به استوانه‌ای به جرم $m$ و شعاع $R$ برابر است با

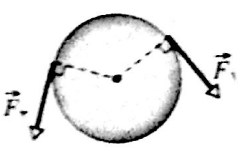
$$\tau_{net} = F_۱R - F_۲R - F_۳r$$
$$= (۶/۰\,\text{N})(۰/۱۲\,\text{m}) - (۴/۰\,\text{N})(۰/۱۲\,\text{m}) - (۲/۰\,\text{N})(۰/۰۵۰\,\text{m})$$
$$= ۰/۱۴\,\text{N.m}$$

(الف) شتاب زاویه‌ای استوانه (به ازای $I = \frac{۱}{۲}MR^{۲}$ بر طبق جدول ۱۰-۲ پ) برابر است با

$$\alpha = \frac{\tau_{net}}{I} = \frac{۰/۱۴\,\text{N.m}}{\frac{۱}{۲}(۲/۰\,\text{kg})(۰/۱۲\,\text{m})^{۲}} = ۹/۷\,\text{rad/s}^{۲}$$

(ب) جهت شتاب زاویه‌ای (با مثبت در نظر گرفتن جهت دوران) در جهت پادساعتگرد است.

**** ۵۳** شکل ۱۰-۴۳ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد، که مانند یک چرخ و فلک می‌تواند به دور مرکزش دوران کند. قرص با شعاع ۲/۰۰cm و جرم ۲۰/۰ گرم در آغاز ساکن است. در زمان شروع دوران $t = ۰$، دو نیرو، مطابق شکل، به طور مماس بر کناره‌ی قرص وارد می‌شوند، به گونه‌ای که سرعت زاویه‌ی پادساعت‌گرد قرص در زمان $t = ۱/۲۵\,\text{s}$، برابر با ۲۵۰rad/s می‌شود. نیروی $F_۱$ دارای بزرگی ۰/۱۰۰N است. بزرگی $F_۲$ چقدر است؟

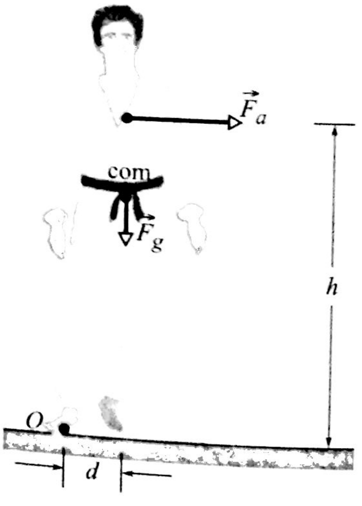



**شکل ۱۰-۴۳** مسئله‌ی ۵۳

**حل** از ترکیب معادله‌ی ۱۰-۴۵ ($\tau_{net} = I\alpha$) با معادله‌ی ۱۰-۳۸ داریم $RF_۲ - RF_۱ = I\alpha$، که در آن $\alpha = \omega / t$ (با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۱۲ به ازای $\omega_۰ = ۰$) است. با توجه به جدول ۱۰-۲ بزرگی $F_۲$ برابر است با

$$F_۲ = \frac{MR\omega}{۲t} + F_۱ = \frac{(۰/۰۲)(۰/۰۲)(۲۵۰)}{۲(۱/۲۵)} + ۰/۱ = ۰/۱۴۰\,N$$

** ۵۴ در حرکت پاروبی مسابقه‌ی جودو، جودوکار پای چپ حریف را از زیر بدنش در حالی می‌روبد که لباس او را به همان طرف می‌کشد. در نتیجه، حریف روی پای راستش می‌چرخد و بر روی تشک می‌افتد. شکل ۱۰-۴۴ نمودار ساده شده‌ی حریف را در حالتی در مقابل جودوکار نشان می‌دهد که پای چپ حریف روبیده شده است. محور دوران از نقطه‌ی $O$ می‌گذرد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به او به طور مؤثر به مرکز جرمش اثر می‌کند، که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی $O$، $d = ۲۸\,cm$ است. جرم حریف $۷۰\,kg$ و لختی دورانی او نسبت به نقطه‌ی $O$ برابر با $۶۵\,kg \cdot m^۲$ است. بزرگی شتاب زاویه‌ای آغازی او نسبت به نقطه‌ی $O$ در حالت‌های زیر چقدراست؟ نیروی کشش $\vec{F}_a$ وارد شده به‌لباس حریف (الف) ناچیز است و (ب) افقی و به بزرگی $۳۰۰\,N$ است، که در ارتفاع $h = ۱/۴\,m$ به حریف وارد می‌شود.




**شکل ۱۰-۴۴** مسئله‌ی ۵۴.

**حل** (الف) در این حالت، نیرو $mg = (۷۰kg)(۹/۸m/s^۲)$، و «بازوی اهرم» (فاصله‌ی عمودی از نقطه‌ی $O$ تا خط اثر نیرو) $۰/۲۸\,m$ است. بنابراین گشتاور نیرو (به صورت مقدار مطلق) برابر است با $(۷۰kg)(۹/۸m/s^۲)(۰/۲۸m)$. چون گشتاور لختی $I = ۶۵kg.m^۲$ است، از معادله‌ی ۱۰-۴۵ داریم

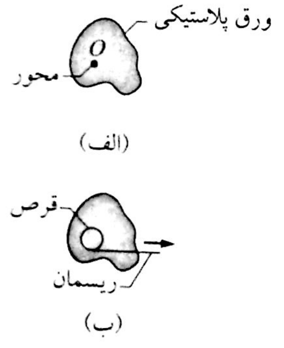
$$|\alpha| = ۲/۹۶\,rad/s^۲$$

(ب) اکنون گشتاور نیروی دیگری ($۱/۴m \times ۳۰۰N$) به گشتاور نیروی برایند اضافه می‌شود:

$$|\tau_{net}| = (۷۰kg)(۹/۸m/s^۲)(۰/۲۸m) + (۱/۴m)(۳۰۰N)$$
$$= (۶۵\,kg.m^۲)|\alpha|$$

که در نتیجه $|\alpha| = ۹/۴۲\,rad/s^۲$ به دست می‌آید.

** ۵۵ در شکل ۱۰-۴۵ الف، یک ورق پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت قرار است به دور یک محور عمود بر وجه ورق و گذرنده از نقطه‌ی $O$ بچرخد. لختی دورانی این ورق نسبت به محور را با روش زیر اندازه می‌گیریم. قرصی دایره‌ای به جرم $۰/۵۰۰\,kg$ و شعاع $۲/۰۰\,cm$ را طوری به این ورق می‌چسبانیم که مرکزش در نقطه‌ی $O$ باشد (شکل ۱۰-۴۵ ب). ریسمانی را به دور لبه‌ی قرص به مانند یک فرفره می‌پیچانیم و سپس ریسمان را به مدت $۵/۰۰\,s$ می‌کشیم. در نتیجه، قرص و ورق با نیروی ثابت $۰/۴۰۰\,N$ که به صورت مماس بر لبه‌ی قرص وارد شده است، می‌چرخد. تندی زاویه‌ای حاصل $۱۱۴\,rad/s$ است. لختی دورانی ورق نسبت به محور چیست؟




**شکل ۱۰-۴۵** مسئله‌ی ۵۵.

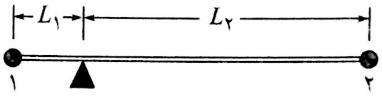
**حل** از ترکیب معادلات ۱۰-۳۴ و ۱۰-۴۵ داریم $RF = I\alpha$، که $\alpha = \omega / t$ (بر طبق معادله‌ی ۱۰-۱۲ به ازای $\omega_۰ = ۰$) است. در ضمن می‌دانیم که

$$I = I_{ورق} + I_{قرص}$$

در این‌جا $I_{قرص} = \frac{۱}{۲}MR^۲$ (مطابق جدول ۱۰-۲ پ) است. در نتیجه داریم

$$I_{ورق} = \frac{RFt}{\omega} - \frac{۱}{۲}MR^۲ = ۲/۵۱\times ۱۰^{-۴}\ kg.m^۲$$

**** ۵۶** شکل ۱۰-۴۶ دو ذره‌ی ۱ و ۲، هر یک به جرم $m$، را نشان می‌دهد. دو ذره به دو سر یک میله‌ی صُلب بی‌جرم به طول $L_۱ + L_۲$، که $L_۱ = ۲۰\,cm$ و $L_۲ = ۸۰\,cm$، وصل شده‌اند. میله را به طول افقی روی تکیه‌گاه نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم. بزرگی شتاب آغازی (الف) ذره‌ی ۱، و (ب) ذره‌ی ۲، چقدر است؟




**شکل ۱۰-۴۶** مسئله‌ی ۵۶.

**حل:** اگر جهت مثبت را در جهت پادساعتگرد انتخاب کنیم، شتاب زاویه‌ای $\alpha$ برای هر دو جرم در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\tau = mgL_۱ - mgL_۲ = I\alpha = (mL_۱^۲ + mL_۲^۲)\alpha$$

این رابطه از ترکیب معادلات ۱۰-۴۵ با ۱۰-۳۹ و ۱۰-۳۳ به دست آمده است. در نتیجه داریم

$$\alpha = \frac{g(L_۱ - L_۲)}{L_۱^۲ + L_۲^۲}$$

$$= \frac{(۹/۸\,m/s^۲)(۰/۲۰m - ۰/۸۰m)}{(۰/۲۰m)^۲ + (۰/۸۰m)^۲} = -۸/۶۵\,rad/s^۲$$

در این‌جا علامت منفی نشان می‌دهد که دستگاه در جهت ساعتگرد می‌چرخد. بزرگی بردار شتاب، (فعلاً) مؤلفه‌ی شعاعی ندارد زیرا در لحظه‌ی $t = ۰$ حساب شده است که سرعت لحظه‌ای در آن لحظه صفر است. بنابراین، با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۲۲ برای دو جرم داریم:

(الف) $|\vec{a}_۱| = |\alpha|L_۱ = (۸/۶۵\,rad/s^۲)(۰/۲۰m) = ۱/۷\,m/s$

(ب) $|\vec{a}_۲| = |\alpha|L_۲ = (۸/۶۵\,rad/s^۲)(۰/۸۰m) = ۶/۹\,m/s^۲$

***** ۵۷ قرقره‌ای با شعاع ۱۰cm و لختی دورانی $۱/۰\times ۱۰^{-۳}\,kg\cdot m^۲$ نسبت به محورش تحت تأثیر نیرویی به‌طور مماس بر کناره‌ی قرقره قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو** برحسب زمان طبق معادله‌ی $F = ۰/۵۰t + ۰/۳۰t^۲$ تغییر می‌کند، که در آن $F$ برحسب نیوتون و $t$ برحسب ثانیه است. قرقره در آغاز ساکن است. در زمان $t = ۳/۰s$، (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای قرقره، چقدر است؟

**حل:** چون نیرو به صورت مماس در $r = ۰/۱۰m$ اثر می‌کند شتاب زاویه‌ای (که مثبت فرض می‌شود) برابر است با

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Fr}{I} = \frac{(۰/۵t + ۰/۳t^۲)(۰/۱۰)}{۱/۰\times ۱۰^{-۳}} = ۵۰t + ۳۰t^۲$$

(الف) در لحظه‌ی $t = ۳s$، از رابطه‌ی بالا داریم

$$\alpha = ۴/۲\times ۱۰^۲\ rad/s^۲$$

(ب) از رابطه‌ی بالا و با در نظر گرفتن $\omega_۰ = ۰$ انتگرال می‌گیریم و تندی زاویه‌ای در لحظه‌ی $t = ۳s$ را به دست می‌آوریم

$$\omega = \int_۰^۳ \alpha dt = (۲۵t^۲ + ۱۰t^۳)\Big|_۰^۳ = ۵/۰\times ۱۰^۲\ rad/s$$

## پودمان ۱۰-۸ کار و انرژی جنبشی دورانی

*** ۵۸** (الف) در شکل ۱۰-۱۹، داریم $R = ۱۲cm$، $M = ۴۰۰g$ و $m = ۵۰g$. تندی جسم را پس از پایین آمدن از حال سکون به اندازه‌ی ۵۰cm، پیدا کنید. این مسئله را با استفاده از اصل پایستگی انرژی حل کنید. (ب) محاسبه‌ی قسمت (الف) را به‌ازای $R = ۵/۰cm$ تکرار کنید.

**حل:** (الف) تندی $v$ جرم $m$ پس از پایین آمدن به اندازه‌ی $d = ۵۰cm$، از رابطه‌ی $v^۲ = ۲ad$ (معادله‌ی ۲-۱۶) به دست می‌آید. در نتیجه به ازای $g = ۹۸۰\,cm/s^۲$ داریم

$$v = \sqrt{۲ad} = \sqrt{\frac{۲(۲mg)d}{M + ۲m}} = \sqrt{\frac{۴(۵۰)(۹۸۰)(۵۰)}{۴۰۰ + ۲(۵۰)}}$$

$$= ۱/۹۶\times ۱۰^۲\ cm/s$$

(ب) پاسخ باز هم $۱/۹۶\times ۱۰^۲\,cm/s = ۱/۹۶\,m/s$ است زیرا ربطی به $R$ ندارد.

*** ۵۹** میل‌لنگ خودرویی در حالی که با تندی زاویه‌ای ۱۸۰۰rev/min می‌چرخد، انرژی را با آهنگ ۱۰۰ قوه اسب (مساوی با ۷۴/۶kW) از موتور به محور منتقل می‌کند. گشتاور نیروی منتقل شده توسط میل‌لنگ (برحسب نیوتون‌متر) چقدر است؟

**حل:** به ازای $\omega = (۱۸۰۰)(۲\pi/۶۰) = ۱۸۸٫۵\,rad/s$ از معادله‌ی ۱۰-۵۵ داریم

$$P = \tau\omega \Rightarrow \tau = \frac{۷۴۶۰۰\,W}{۱۸۸٫۵\,rad/s} = ۳۹۶\,N.m$$

* **۶۰** میله‌ی باریکی به طول $۰٫۷۵\,m$ و جرم $۰٫۴۲\,kg$ از یک سر به‌طور آزاد آویخته شده است. سر دیگر میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس آن را رها می‌کنیم تا در حالی که از پایین‌ترین مکان با تندی زاویه‌ای $۴٫۰\,rad/s$ می‌گذرد، مانند یک آونگ تاب بخورد. با چشم‌پوشی از اصطکاک و مقاومت هوا، (الف) انرژی جنبشی میله را در پایین‌ترین مکان پیدا کنید. (ب) مرکز جرم میله نسبت به پایین‌ترین مکان، چه اندازه بالا می‌رود؟

**حل:** (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۴ استفاده می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲}I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۳}mL^۲\right)\omega^۲ = \frac{۱}{۶}mL^۲\omega^۲$$

$$= \frac{۱}{۶}(۰٫۴۲kg)((۰٫۷۵m)^۲(۴٫۰rad/s)^۲) = ۰٫۶۳\,J$$

(ب) از تبدیل انرژی مکانیکی داریم $K = mgh$. در نتیجه مقدار بالا رفتن مرکز جرم میله برابر است با

$$h = \frac{K}{mg} = \frac{mL^۲\omega^۲}{۶mg} = \frac{L^۲\omega^۲}{۶g}$$

$$= \frac{(۰٫۷۵m)^۲(۴٫۰rad/s)^۲}{۶(۹٫۸m/s^۲)} = ۰٫۱۵m$$

* **۶۱** چرخی به جرم $۳۲٫۰\,kg$ که به شکل طوقه‌ای باریک به شعاع $۱٫۲۰\,m$ است، با تندی $۲۸۰\,rev/min$ می‌چرخد. این چرخ باید در مدت ۱۵٫۰ ثانیه متوقف شود. (الف) چقدر کار باید برای متوقف کردن چرخ انجام شود؟ (ب) توان متوسط لازم چقدر است؟

**حل:** تندی زاویه‌ای آغازی به صورت زیر است

$$\omega = (۲۸۰rev/min)(۲\pi/۶۰) = ۲۹٫۳\,rad/s$$

(الف) چون لختی دورانی (جدول ۱۰-۲ الف) به صورت $I = (۳۲kg)(۱٫۲m)^۲ = ۴۶٫۱\,kg.m^۲$ است، کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta K = ۰ - \frac{۱}{۲}I\omega^۲$$

$$= -\frac{۱}{۲}(۴۶٫۱kg.m^۲)(۲۹٫۳rad/s)^۲ = -۱٫۹۸\times۱۰^۴\,J$$

(ب) توان متوسط (به صورت مقدار مطلق) برابر است با

$$|P| = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{۱۹٫۸\times۱۰^۳}{۱۵} = ۱٫۳۲\times۱۰^۳\,W$$

** **۶۲** در شکل ۱۰-۳۲، سه ذره، هر یک به جرم $۰٫۰۱۰۰\,kg$، به میله‌ای به طول $L = ۶٫۰۰\,cm$ و به جرم ناچیز چسبیده‌اند و میله می‌تواند به دور محوری عمود و گذرنده از نقطه‌ی $O$ واقع در یک سر میله بچرخد. چقدر کار برای تغییر دادن تندی زاویه‌ای دوران $\omega$، (الف) از صفر تا $۲۰٫۰\,rad/s$، (ب) از $۲۰٫۰\,rad/s$ تا $۴۰٫۰\,rad/s$، و (پ) از $۴۰٫۰\,rad/s$ تا $۶۰٫۰\,rad/s$، لازم است؟ (ت) شیب نمودار انرژی جنبشی دستگاه (برحسب ژول) نسبت به $\omega^۲$ (برحسب مجذور رادیان بر مجذور ثانیه) چیست؟

**حل:** (الف) از معادله‌ی ۱۰-۳۳ داریم

$$I_{کل} = md^۲ + m(۲d)^۲ + m(۳d)^۲ = ۱۴md^۲$$

در این‌جا $m = ۰٫۰۱۰\,kg$ و $d = ۰٫۰۲۰\,m$ است. کار انجام شده برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}I\omega_f^۲ - \frac{۱}{۲}I\omega_i^۲$$

که در آن $\omega_f = ۲۰\,rad/s$ و $\omega_i = ۰$ است. در نتیجه $W = ۱۱٫۲\,mJ$ به دست می‌آید.

(ب) در این حالت، $\omega_f = ۴۰\,rad/s$ و $\omega_i = ۲۰\,rad/s$ است و $W = ۳۳٫۶\,mJ$ به دست می‌آید.

(پ) در این حالت، $\omega_f = ۶۰\,rad/s$ و $\omega_i = ۴۰\,rad/s$ است، در نتیجه کار انجام شده به صورت $W = ۵۶٫۰\,mJ$ به دست می‌آید.

(ت) معادله‌ی ۱۰-۳۴ نشان می‌دهد که شیب باید مساوی با $\frac{۱}{۲}I$ باشد. در نتیجه داریم

$$۷md^۲ = ۲٫۸۰\times۱۰^{-۵}\,J.s^۲/rad^۲$$

** **۶۳** یک خط‌کش چوبی یک متری را به طور قائم از یک سرش بر روی زمین نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم تا بیفتد. تندی سر دیگر خط‌کش را هنگام برخورد به سطح زمین، با این فرض که سر پایینی آن بر روی سطح نمی‌لغزد، پیدا کنید. (*راهنمایی:* خط‌کش را به صورت یک میله‌ی باریک در نظر بگیرید و از اصل پایستگی انرژی استفاده کنید).

**حل:** طول خط‌کش را با $l$ نشان می‌دهیم. چون مرکز جرم آن به فاصله‌ی $l/2$ از هر انتها قرار دارد، انرژی پتانسیل آغازی آن $\frac{1}{2}mgl$ است. انرژی جنبشی آغازی خط‌کش صفر است. انرژی پتانسیل پایانی خط‌کش صفر، و انرژی جنبشی پایانی آن $\frac{1}{2}I\omega^2$ است که در آن $I$ لختی دورانی خط‌کش حول محور گذرنده از یک انتهای خط‌کش و $\omega$ سرعت زاویه‌ای خط‌کش پیش از برخورد به زمین است. از تبدیل انرژی‌ها به یکدیگر داریم

$$\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

فاصله‌ی انتهای آزاد خط‌کش از محور دوران، $l$ است و تندی آن در لحظه برخورد به زمین (از معادله‌ی ۱۰-۱۸) برابر است با

$$v = \omega l = \sqrt{\frac{mgl^3}{I}}$$

با استفاده از جدول ۱۰-۲ و قضیه‌ی محور موازی، لختی دورانی $I = \frac{1}{3}ml^2$ است، و درنتیجه تندی سر دیگر خط‌کش برابراست با

$$v = \sqrt{3gl} = \sqrt{3(9/80\,m/s^2)(1/00\,m)} = 5/42\,m/s$$

**۶۴ **** استوانه‌ی یکنواختی به شعاع ۱۰cm و جرم ۲۰kg طوری قرار داده شده است که می‌تواند به دور محوری افقی موازی با محور طولی مرکزی استوانه و به فاصله‌ی ۵/۰cm از این محور، بچرخد. (الف) لختی دورانی استوانه نسبت به این محور دوران چقدر است؟ (ب) اگر استوانه ازحال سکون طوری رها شود که محور طولی مرکزی‌اش با محور دوران استوانه هم ارتفاع باشد، تندی زاویه‌ای استوانه هنگام عبور از پایین‌ترین مکان چقدر است؟

**حل:** (الف) برای پیدا کردن لختی دورانی از قضیه‌ی محور موازی استفاده می‌کنیم

$$I = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{2}mR^2 + Mh^2$$
$$= \frac{1}{2}(20kg)(0/10m)^2 + (20kg)(0/050m)^2 = 0/15kg.m^2$$

**(ب) با توجه به پایسته بودن انرژی داریم $Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2$، که در آن $\omega$ تندی زاویه‌ای استوانه در هنگام عبور از پایین‌ترین مکان است. بنابراین داریم**

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mgh}{I}} = \sqrt{\frac{2(20kg)(9/8m/s^2)(0/050m)}{0/15kg.m^2}} = 11/4\,rad/s$$

**۶۵ ***** یک دودکش بلند استوانه‌ای شکل پایه‌اش در هم می‌شکند و سرنگون می‌شود. دودکش را به صورت میله‌ی باریکی به‌طول ۵۵/۰m در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش در حین افتادن با راستای قائم زاویه‌ی ۳۵/۰ درجه می‌سازد، (الف) شتاب شعاعی نوک دودکش، و (ب) شتاب مماسی نوک دودکش چیست؟ (*راهنمایی:* از روش‌های انرژی استفاده کنید نه گشتاور نیرو). (پ) به ازای کدام زاویه‌ی $\theta$ شتاب مماسی با $g$ برابر است؟

**حل:** (الف) از پایستگی انرژی مکانیکی برای پیدا کردن رابطه‌ی $\omega^2$ برحسب زاویه‌ی دودکش با راستای قائم، $\theta$، استفاده می‌کنیم. انرژی پتانسیل دودکش از رابطه‌ی $U = Mgh$ به دست می‌آید که در آن $M$ جرم و $h$ ارتفاع مرکز جرم از سطح زمین است. وقتی دودکش با راستای قائم زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد، $h = (H/2)\cos\theta$ است. در آغاز انرژی پتانسیل $U_i = Mg(H/2)$ و انرژی جنبشی صفر است. وقتی دودکش با راستای قائم زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد، انرژی جنبشی $\frac{1}{2}I\omega^2$ است که در آن $I$ لختی دورانی دودکش حول لبه‌ی پایینی است. در نتیجه از اصل پایستگی انرژی داریم

$$MgH/2 = Mg(H/2)\cos\theta + \frac{1}{2}I\omega^2$$
$$\Rightarrow \omega^2 = (MgH/I)(1-\cos\theta)$$

لختی دورانی دودکش حول پایه‌ی آن $I = MH^2/3$ است (با استفاده از جدول ۱۰-۲ و قضیه‌ی محور موازی). در نتیجه داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{H}(1-\cos\theta)} = \sqrt{\frac{3(9/80m/s^2)}{55/0m}(1-\cos 35/0°)}$$
$$= 0/311\,rad/s$$

(ب) مؤلفه‌ی شعاعی شتاب نوک دودکش از رابطه‌ی $a_r = H\omega^2$ به دست می‌آید:

$$a_r = 3g(1-\cos\theta) = 3(9/80m/s^2)(1-\cos 35/0°)$$
$$= 5/32\,m/s^2$$

(پ) مؤلفه‌ی مماسی شتاب نوک دودکش از رابطه‌ی $a_t = H\alpha$ به‌دست می‌آید که $\alpha$ شتاب زاویه‌ای است. در این‌جا ما نمی‌توانیم از جدول ۱۰-۱ استفاده کنیم زیرا شتاب یکنواخت نیست. بنابراین از رابطه‌ی

$$\omega^2 = (3g/H)(1-\cos\theta)$$

نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و به‌جای $d\omega/dt$ مقدار $\alpha$ و به‌جای $d\theta/dt$ مقدار $\omega$ را قرار می‌دهیم:

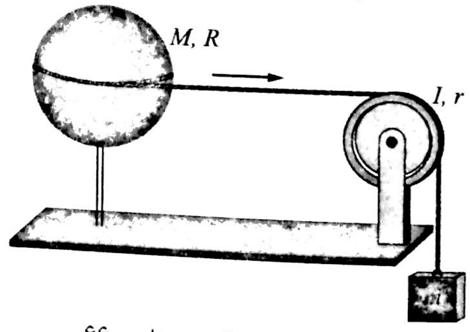
$$\frac{d\omega^۲}{dt} = ۲\omega\alpha = (۳g/H)\omega\sin\theta \Rightarrow \alpha = (۳g/۲H)\sin\theta$$

در نتیجه داریم

$$a_t = H\alpha = \frac{۳g}{۲}\sin\theta = \frac{۳(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})}{۲}\sin ۳۵٫۰^\circ = ۸٫۴۳\,\mathrm{m/s^۲}$$

(ت) در رابطه‌ی بالا $a_t = g$ را قرار می‌دهیم و به نتیجه‌ی $\frac{۳g}{۲}\sin\theta = g$ می‌رسیم. در نتیجه $\sin\theta = ۲/۳$ و $\theta = ۴۱٫۸^\circ$ به دست می‌آید.

*** ۶۶ پوسته‌ی کروی یکنواختی به جرم $M = ۴٫۵\,\mathrm{kg}$ و شعاع $R = ۸٫۵\,\mathrm{cm}$ روی یاتاقان‌های بی‌اصطکاکی به دور یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۰–۴۷). ریسمان بی‌جرمی به دور استوای پوسته‌ی کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی دورانی $I = ۳٫۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$ و شعاع $r = ۵٫۰\,\mathrm{cm}$، به شیء کوچکی به جرم $m = ۰٫۶۰\,\mathrm{kg}$ وصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد. تندی شیء پس از سقوط از حالت سکون به اندازه‌ی ۸۲ cm، چقدر است؟ از روش انرژی استفاده کنید.




**شکل ۱۰–۴۷** مسئله‌ی ۶۶.

**حل:** با توجه به جدول ۱۰–۲، لختی دورانی پوسته‌ی کروی $۲MR^۲/۳$ است، لذا انرژی جنبشی شیئی (پس از سقوط به اندازه‌ی $h$) برابر است با

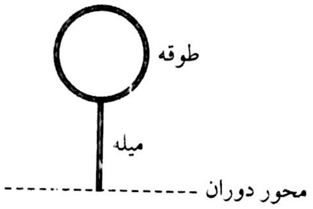
$$K = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{۳}MR^۲\right)\omega^۲_{\text{کره}} + \frac{۱}{۲}I\omega^۲_{\text{قرقره}} + \frac{۱}{۲}mv^۲$$

چون شیئی از حال سکون سقوط می‌کند، این انرژی (در غیاب اصطکاک) باید با انرژی پتانسیل $mgh$ آغازی برابر باشد. به جای تندی زاویه‌ای قرقره مقدار $v/r$ و به جای تندی زاویه‌ای کره مقدار $v/R$ را قرار می‌دهیم و $v$ را حساب می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{۱}{۲}m + \frac{۱}{۲}\frac{I}{r^۲} + \frac{M}{۳}}} = \sqrt{\frac{۲gh}{۱+(I/mr^۲)+(۲M/۳m)}}$$

$$= \sqrt{\frac{۲(۹٫۸)(۰٫۸۲)}{۱+۳٫۰\times۱۰^{-۳}/((۰٫۶۰)(۰٫۰۵۰)^۲)+۲(۴٫۵)/۳(۰٫۶۰)}} = ۱٫۴\,\mathrm{m/s}$$

*** ۶۷ شکل ۱۰–۴۸ مجموعه‌ی صُلبی از یک طوقه‌ی باریک (به جرم $m$ و شعاع $R = ۰٫۱۵۰\,\mathrm{m}$) و میله‌ی شعاعی باریکی (به جرم $m$ و طول $L = ۲٫۰۰R$) را نشان می‌دهد. این مجموعه به طور قائم قرار گرفته است، اما اگر ضربه‌ی کوچکی به آن بزنیم، به دور یک محور افقی واقع در صفحه‌ی میله و طوقه و گذرنده از انتهای پایینی میله می‌چرخد. با این فرض که انرژی داده شده به مجموعه از طریق ضربه ناچیز است، تندی زاویه‌ای مجموعه به دور محور دوران وقتی که از وضعیت رو به زیر (وارون) عبور می‌کند، چیست؟




**شکل ۱۰–۴۸** مسئله‌ی ۶۷.

**حل:** با استفاده از قضیه‌ی محور موازی و بخش‌های ث و ح در جدول ۱۰–۲، لختی دورانی برابر است با

$$I = \frac{۱}{۱۲}mL^۲ + m(L/۲)^۲ + \frac{۱}{۲}mR^۲ + m(R+L)^۲ = ۱۰٫۸۳\,mR^۲$$

در این‌جا $L = ۲R$ را قرار داده‌ایم. اگر قاعده‌ی میله را در مبداء مختصات ($x = ۰$، $y = ۰$) در نظر بگیریم، مکان مرکز جرم عبارت است از

$$y = \frac{mL/۲ + m(L+R)}{m+m} = ۲R$$

از مقایسه‌ی مکان مرکز جرم نشان داده شده در شکل صورت مسئله با مکان مرکز جرم در حالت وارون، نشان می‌دهد که مقدار مطلق تغییر مکان مرکز جرم $|\Delta y| = ۴R$ است. انرژی پتانسیل گرانشی

تلف شده به انرژی جنبشی تبدیل شده است. در نتیجه با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ داریم

$$K = (2m)g(4R) \Rightarrow \omega = 9.82\ \mathrm{rad/s}$$

## مسئله‌های بیشتر

۶۸ دو کره‌ی توپر یکنواخت دارای جرم یکسان ۱/۶۵kg هستند، اما شعاع یکی از آن‌ها ۰/۲۲۶m و شعاع دیگری ۰/۸۵۴m است. هر کره می‌تواند به دور یک محور گذرنده از مرکزش دوران کند. (الف) بزرگی گشتاور نیروی لازم $\tau$، برای آنکه کره‌ی کوچک‌تر در مدت ۱۵/۵ ثانیه از حال سکون به تندی زاویه‌ای ۳۱۷ rad/s برسد، چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی $F$ که باید به طور مماس بر دایره‌ی استوای کره وارد شود تا این مقدار گشتاور نیرو را ایجاد کند، چیست؟ همین مقادیر (پ) $\tau$ و (ت) $F$، برای کره‌ی بزرگ‌تر چه باید باشند؟

**حل:** جهت‌های ± را طوری انتخاب می‌کنیم که سرعت زاویه‌ای آغازی $\omega_0 = -317\ \mathrm{rad/s}$ و مقادیر $\alpha$، $\tau$ و $F$ مثبت باشند.

(الف) از ترکیب معادلات ۱۰-۱۲ و ۱۰-۴۵ و استفاده از جدول ۱۰-۲ ج (و قرار دادن $\omega = 0$)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\tau = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(-\frac{\omega_0}{t}\right) = -\frac{2}{5}\frac{MR^2\omega_0}{t}$$

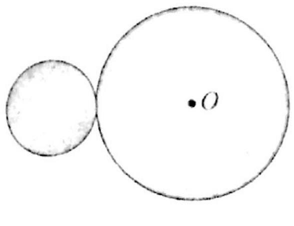
به ازای $M = 1.65\ \mathrm{kg}$، $R = 0.226\ \mathrm{m}$، $t = 15.5\ \mathrm{s}$ داریم $\tau = 0.689\ \mathrm{N.m}$.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۴۰ مقدار $F = \tau / R = 3.05\ \mathrm{N}$ به دست می‌آید.

(پ) باز هم از رابطه‌ی به دست آمده در قسمت (الف) استفاده می‌کنیم، اما این بار $R = 0.854\ \mathrm{m}$ را قرار می‌دهیم و $\tau = 9.84\ \mathrm{N.m}$ را به دست می‌آوریم.

**(ت) در این حالت، $F = \tau / R = 11.5\ \mathrm{N}$ است.**

**۶۹ در شکل ۱۰-۴۹، یک قرص کوچک به شعاع $r = 2.00\ \mathrm{cm}$ به لبه‌ی یک قرص بزرگ به شعاع $R = 4.00\ \mathrm{cm}$ به گونه‌ای چسبیده است که قرص‌ها در یک صفحه قرار دارند. این قرص‌ها می‌توانند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی $O$ واقع در مرکز قرص بزرگ بچرخند. این دو قرص دارای** چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت $1.40\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ و ضخامت یکنواخت ۵/۰۰mm هستند. لختی دورانی مجموعه‌ی دو قرص نسبت به محور دوران گذرنده از نقطه‌ی $O$ چیست؟




**شکل ۱۰-۴۹** مسئله‌ی ۶۹.

**حل:** حجم هر قرص $\pi r^2 h$ است که $h$ معرف ضخامت (مساوی با ۰/۰۰۵۰۰m) است. اگر $R$ معرف شعاع قرص بزرگ‌تر (مساوی با ۰/۰۴۰۰m) و $r$ معرف شعاع قرص کوچک‌تر (مساوی با ۰/۰۲۰۰m) باشد، جرم آن‌ها $m = \rho\pi r^2 h$ و $M = \rho\pi R^2 h$ است که $\rho = 1400\ \mathrm{kg/m^3}$ چگالی هر قرص است. اکنون از قضیه‌ی محور موازی و همچنین از جدول ۱۰-۲ پ برای به دست آوردن لختی دورانی مجموعه‌ی دو قرص استفاده می‌کنیم:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + m(r+R)^2$$

$$= \rho\pi h\left[\frac{1}{2}R^4 + \frac{1}{2}r^4 + r^2(r+R)^2\right] = 6.16\times10^{-5}\ \mathrm{kg.m^2}$$

۷۰ چرخی از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت ۲/۰۰ rad/s² شروع به چرخیدن می‌کند. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی معین ۳/۰۰s به‌اندازه‌ی ۹۰/۰ rad می‌چرخد. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ در شروع بازه‌ی زمانی ۳/۰۰s چقدر است؟ (ب) این چرخ تا شروع بازه‌ی زمانی ۳/۰۰s چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

**حل:** چرخ در لحظه‌ی $t = 0$ از حال سکون ($\omega_0 = 0$) شروع به چرخیدن می‌کند و شتاب یکنواخت آن $\alpha = 2.00\ \mathrm{rad/s^2}$ است. این چرخ در بین لحظات $t_1$ و $t_2$ زاویه‌ی $\Delta\theta = 90.0\ \mathrm{rad}$ را می‌پیماید و $t_2 - t_1 = \Delta t = 3.00\ \mathrm{s}$ است. ابتدا قسمت (ب) را حل می‌کنیم.

(ب) از معادله‌ی ۱۰-۱۳ (با تغییر جزئی در نمادگذاری) برای توصیف حرکت در بازه‌ی زمانی $t_1 \le t \le t_2$ استفاده می‌کنیم:

$$\Delta\theta = \omega_1\Delta t + \frac{1}{2}\alpha(\Delta t)^2 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} - \frac{\alpha\Delta t}{2}$$